УДК 517.91

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ В ГЕЛЬДЕРОВЫХ ФУНКЦИЯХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПО ПЕТРОВСКОМУ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

О.А.Дышин
(НИПИ "Нефтегаз")

Получены условия разрешимости в классе гельдеровских функций начально-краевых задач, для линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, параболических в смысле И.Г.Петровского. Выведенное в работе соотношение между гладкостью известных функций, входящих в задачу, и гладкостью самого решения является точным. Наложенные условиями разрешимости задач ограничения на коэффициенты уравнений являются необходимыми, то же самое справедливо для краевых и начальных условий. Показано приложение к задачам неустановившейся фильтрации однородной жидкости в деформируемых трещиновато-пористых средах.

Ключевые слова: параболические по Петровскому системы уравнений, главная часть полинома, условие дополнительности матрицы, согласованность начальных и краевых условий.

Адрес связи: oleg.dyshin@mail.ru

DOI: 10.5510/OGP20120100107

Введение

Вопросы разрешимости начально-краевых задач для линейных систем дифференциальных уравнений, параболических в смысле И.Г.Петровского (и в более широком смысле), исследованы в [1-5]. Обзор основных результатов по исследованию общих краевых задач для линейных систем уравнений параболического типа приведен в книге [2]. Основным условием разрешимости краевых задач для линейных параболических систем является выполнение для граничного и начального дифференциального оператора так называемого условия дополнительности, сформулированного впервые в ранговой форме Я.Б.Лопатинским [6]. Разрешимость начально-краевых (смешанных) задач в классе гельдеровских функций доказана в [3] для общего класса параболических систем при выполнении условий дополнительности для начальных и граничных операторов в предположении гладкости данных задачи, обеспечивающей удовлетворение условий согласования минимального порядка, необходимых для существования решения из указанного класса.

В настоящей работе получены условия существования и единственности решения в классе гельдеровских функций начально-краевой задачи для параболической в смысле И.Г.Петровского системы дифференциальных уравнений. Наложенные этими условиями ограничения на коэффициенты уравнений являются необходимыми, то же самое справедливо для краевых и начальных условий.

Результаты работы имеют приложения к краевым задачам неустановившегося движения однородной капельной жидкости в трещиновато-пористых средах, которые описываются системой линейных параболических уравнений [7, 8].

1. Постановка задачи и ее разрешимость

Пусть $Q_T = \Omega\cdot(0,T)$ - цилиндр в пространстве переменных $(x, t) \in E_{n+1}$, где $x \in E_n$ и $t \in E_1$ (E_n - n - мерное евклидово пространство); Ω - ограниченная область в E_n с границей S; S_T - боковая поверхность цилиндра Q_T, т.е. совокупность точек (x, t) из E_{n+1} с $x \in S$, $t \in [0, T]$; $\Omega = [0, R]^n$. Рассмотрим в Q_T систему линейных уравнений

$$\mathscr{L}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(x,t)=\vec{f}(x,t),\quad (x,t)\in Q_T \tag{1}$$

где $\vec{u}(x,t)$, $\vec{f}(x,t)$ - m -мерные вектор-функции $\vec{u}=(u^1,\dots,u^m)$

$\vec{f}=(f^1,\dots,f^m)$, $\mathscr{L}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ - матричный дифференциальный оператор размерности $m\times m$ с элементами $L_{kj}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$.

Пусть $L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)=\det\mathscr{L}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ - линейный дифференциальный оператор с комплексными коэффициентами, зависящими от $(x, t) \in Q_T$. Ясно, что в любой точке $(x, t) \in Q_T$ функция $L(x, t, i\xi, p)$, где $i = \sqrt{-1}$; ξ и p - соответственно вещественный и комплексный скалярный параметр, является полиномом относительно ξ и p. Пусть, далее, b - некоторое положительное целое число и пусть степень полинома $L(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b})$ относительно λ равна $2br$, где $r > 0$ - целое число. Обозначим через L_0 главную часть полинома L, т.е. сумму всех членов L, для которых

$$L_0(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b})= \lambda^{2b}L_0(x, t, i\xi, p).$$

Определение 1 [2]. Оператор L называется параболическим ($2b$ - параболическим) в точке (x, t), если при любом вещественном ξ корни p_ν полинома $L_0(x, t, i\xi, p)$ по переменной p удовлетворяют условию

$$Re\,p_\nu \le \delta\,|\,\xi\,|^{2b}\quad (\delta > 0). \tag{2}$$

Как доказано в [2], для параболического оператора L числа b и r определяются единственным образом;

r - это степень полинома $L(x, t, i\xi, p)$ по p, а $2br$ - по переменной ξ.

Оператор L называется *равномерно параболическим* в области Q_T, если он является параболическим в каждой точке этой области и неравенство (2) выполняется в каждой точке $(x, t) \in Q_T$ с одним и тем же числом $\delta > 0$.

Для уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами $b = 1$, $L_0(x, t, i\xi, p) = p + a(x, t)\xi^2$ и условие равномерной параболичности в данном случае обычно записывают в виде

$$\nu_1 \le a(x, t) \le \nu_2, \quad \nu_2 > \nu_1 > 0, \quad (x, t) \in \bar{Q}_T, \tag{3}$$

откуда следует $\mathrm{Re}p_\nu = p_\nu = -a(x, t)\xi^2 \le -\nu_1 |\xi|^2$, так что $\delta = \nu_1$.

<u>Определение 2</u> [2]. Матричный дифференциальный оператор $\mathscr{L}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ с элементами $L_{k\mu}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ $(k, \mu = 1,\dots, m)$ называется параболическим в смысле И.Г.Петровского, если:

1) оператор $L\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right) = \det \mathscr{L}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$

является $2b$ - параболическим в смысле определения 1;

2) степень полинома $L_{k\mu}(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b})$ $(k, \mu = 1,\dots, m)$ относительно λ не превосходит $2br_\mu$ и

$L_{k\mu}(x, t, i\xi, p) = \delta_{k\mu} p^{r_\mu} + L'_{k\mu}(x, t, i\xi, p)$,

где $L'_{k\mu}$ - полином, не содержащий p^{r_μ}; $\delta_{k\mu}$ - символ Кронекера.

Главной частью полинома $L_{k\mu}(x, t, i\xi, p)$ называют сумму $L^0_{k\mu}$ всех членов $L_{k\mu}$ для которых выполняется условие однородности

$$L^0_{k\mu}(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b}) = \lambda^{2br_\mu} L^0_{k\mu}(x, t, i\xi, p), \tag{4}$$

а матрицу $\mathscr{L}_0$, составленную из $L^0_{k\mu}$, называют главной частью матрицы L. Очевидно, что полином

$$L_0(x, t, i\xi, p) = \det\mathscr{L}_0(x, t, i\xi, p) \tag{5}$$

является главной частью полинома L.

Для систем, параболических по И.Г.Петровскому, характерно то, что степень однородности полиномов $L^0_{k\mu}$, равная $2br_\mu$, не зависит от k и такие системы могут быть разрешены относительно старших производных по t

$$\frac{\partial^{r_\mu}}{\partial t^{r_\mu}} u^\mu$$

Будем записывать их в виде [9]

$$\frac{\partial^{r_k} u^{r_k}}{\partial t^{r_k}} = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{2bp+|l|\le 2br_\mu} A^{p,l}_{k\mu} D^p_t D^l_x u^\mu + f^k(x,t), \quad (k = 1,\dots,m) \tag{6}$$

где $r_1,\dots,r_m$ - целые положительные числа $l = (l_1,\dots, l_n)$, $|l| = l_1+\dots+l_n$, $D^l_x = D^{l_1}_{x_1} \dots D^{l_n}_{x_n}$, $D_{x_i} = \partial/\partial x_i$, $D_t = \partial/\partial t$. Функции $f^k(x, t)$ и коэффициенты $A^{pl}_{k\mu}(x, t)$ определены на Q_T.

Введением новых функций

$$w^{r_1+\dots r_{k-1}+p} = \frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}} u^k \quad (p = 1,\dots r_k - 1;\ k = 1,\dots,m) \tag{7}$$

система (6) сводится к системе вида

$$\frac{\partial w^i}{\partial t} = \sum_{\nu=1}^{N} \sum_{|l|\le 2br(\nu)} A^l_{il}(x,t) D^l_x w^\nu + g^i(x,t), \quad (i = 1,\dots,N) \tag{8}$$

где

$$g^i(x,t) = \begin{cases} f^i(x,t), i = r_1+\dots+r_k (k = 1,\dots,m); \\ 0, \quad \text{в противном случае}; \end{cases} \tag{9}$$

$$A^l_{i\nu}(x,t) = \begin{cases} 1, \nu = i+1 \\ 0,\ 1, \nu \ne i+1 \end{cases} \begin{pmatrix} r_0+r_1+\dots+r_{k-1} < i < r_0+r_1+\dots+r_k; \\ k = 1,\dots,m; \qquad r_0 = 0; \end{pmatrix};$$

$A^l_{i\nu}(x,t) = A^{pl}_{k\mu}(x, t)$

при $i = r_1+\dots+ r_k$ $(k = 1,\dots,m)$ и

$\nu = r_0 + r_1+\dots+r_{\mu-1}+p-1$, $r(\nu) = r_\mu$ $(p = 1,\dots, r_\mu;\ \mu = 1,\dots, m)$

Однако корни полинома:

$$\det\left(\sum_{|l|=2br(\nu)} A^l_{i\nu}(x,t),\ (i\xi)^l - \delta_{il}\cdot\lambda\right) \tag{10}$$

вообще говоря, отличны от корней полинома:

$$\det\left(\sum_{2bp+|l|=2br_\mu} A^{pl}_{k\mu}(x,t)\lambda^p (i\xi)^l - \delta_{k\mu}\cdot\lambda\right) \tag{11}$$

Здесь (10) и (11) - главная часть полинома $L(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b})$ относительно λ для системы (8) и (6) соответственно. Следовательно, система (8) может не быть параболической по Петровскому, если даже таковой является система (6) (см.примеры из [9]).

В дальнейшем будут рассматриваться общие краевые задачи для систем (1), параболических в смысле определения 2. В них граничные условия задаются равенством:

$$\mathscr{B}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(x,t)\Big|_{S_T} = \vec{\Phi}(t) \tag{12}$$

где $\mathscr{B}$ - матричный дифференциальный оператор, а $\Phi(t)$ - вектор-функция, заданная на поверхности S_T.

Выясним, сколько строк должна иметь матрица B (т.е. сколько их нужно задавать на границе) и каким алгебраическим условиям эта матрица должна удовлетворять для того, чтобы условие (12) порождало хорошо поставленную краевую задачу.

Прежде всего определим главную часть $\mathscr{B}_0$ матрицы $\mathscr{B}$. Обозначим через $B_{q\mu}(q=1,\dots,N,\ \mu=1,\dots, m)$элементы матрицы B и через $\beta_{q\mu}$ - степень по-линома $B_{qm}(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b})$ относительно λ; если $B_{q\mu}=0$, положим $\beta_{q\mu}=0$ Пусть

$$\sigma_q = \max_\mu(\beta_{q\mu} - t_\mu).$$

Тогда $\sigma_q + t_\mu \ge \beta_{q\mu}$.

Главной частью полинома $B_{q\mu}$ назовем сумму $B^0_{q\mu}$ всех его членов, удовлетворяющих условию однородности:

$$B^0_{q\mu}(x, t, i\xi\lambda, p\lambda^{2b}) = \lambda^{\sigma_q+t_\mu}\cdot B^0_{q\mu}(x, t, i\xi, p) \tag{13}$$

Через $\mathscr{B}_0$ обозначим матрицу с элементами $B^0_{q\mu}$. Таким образом, выбор главной части $\mathscr{B}_0$ матрицы $\mathscr{B}$ зависит от чисел t_j и может быть неоднозначен.

Возьмем любую точку $(x_0, t_0) \in S_T$ и произвольный вещественный вектор $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$. Его можно однозначно представить в виде:

$$\xi = \zeta + t\nu, \tag{14}$$

где $\zeta = (\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1})$ - вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности S в точке x_0, ν - единичный вектор внутренней нормали в точке x_0 и τ -вещественный параметр.

Обозначим через $\mathscr{B}_0\left(x_0,t_0,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ и $\mathscr{L}_0\left(x_0,t_0,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ операторы $\mathscr{B}_0\left(x_0,t_0,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ и $\mathscr{L}_0\left(x_0,t_0,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$, в которых коэффициенты "заморожены" (т.е. зафиксированы) в точке (x_0, t_0), а все младшие члены отброшены.

Рассмотрим полином

$$\hat{L}_0(x_0, t_0, i(\zeta + t\nu), p) = \det\hat{\mathscr{L}}_0 (x_0, t_0, i(\zeta + t\nu), p) \qquad (15)$$

как функцию τ на всей комплексной плоскости. Согласно теореме 7.9.1 [2], если полином $\hat{L}_0$ удовлетворяет условию (2), то при любых вещественных $\zeta = (\zeta_1,...,\zeta_{n-1})$ и любом комплексном p, удовлетворяющем условиям:

$$\mathrm{Re}\,p \geq -\delta_1 |\zeta|^{2b} \; (0 < \delta_1 < \delta), |p|+|\zeta| > 0 \qquad (16)$$

полином (15) имеет br корней с положительной мнимой частью (их мы обозначим через $\tau^+_l(x_0, t_0, \zeta, p)$ и br - с отрицательной.

Пусть

$$L^+(x_0,t_0,\zeta,p,\tau) = \prod_{l=1}^{br}\left[\tau - \tau_l^+(x_0,t_0,\zeta,p)\right] \qquad (17)$$

Будем предполагать, что матрица $\mathscr{B}_0$ удовлетворяет так называемому "условию дополнительности":

Условие $P(\mathscr{B})$: для любой точки $(x_0, t_0) \in S_T$ строки матрицы:

$$\hat{\mathscr{B}}^1 (x_0,t_0,i(\zeta+t\nu),p) = \hat{\mathscr{B}}_0 (x_0,t_0,i(\zeta+t\nu),p)\hat{\mathscr{L}}_0 (x_0,t_0,i(\zeta+t\nu),p) \qquad (18)$$

линейно независимы по модулю полинома L^+ как полиномы по τ, если вектор ζ и р удовлетворяют условиям (16) при некотором $\delta_1 \in (0, \delta)$, где δ число из (2).

Линейная независимость строк матрицы $\hat{\mathscr{B}}^1(x_0,t_0,i(\zeta+\tau\nu),p)$ по модулю полинома L^+ означает, что элементы $B^1_{q\mu}(x_0,t_0,i(\zeta+t\nu),p)$ этой матрицы при всех $\mu=1,...,m$ удовлетворяют равенству:

$$\sum_{q=1}^{br} d_q \hat{B}^1_{q\mu}(x_0,t_0,i(\zeta+\tau\nu) = p_\mu(\tau)L^+(x_0,t_0,\zeta,p,\tau) \qquad (19)$$

с некоторыми полиномами p_μ тогда и только тогда, когда все $d_q = 0$.

Таким образом, матрица $\mathscr{B}$ в граничном условии (12) должна иметь $r^+ = br$ строк, т.е. в каждой точке x_0 границы S матрица $\mathscr{B}$ имеет размерность $(br) \cdot m$.

Частным случаем параболических по Петровскому систем являются системы, у которых все $r_\mu=1$. К таким системам, как было указано выше (см.(8)), путем введения новых функций (7) сводится (правда, не эквивалентным образом) любая система вида (6), и они могут быть записаны в виде:

$$\mathscr{L}\vec{u} \equiv \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \mathscr{A}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x}\right)\vec{u} = \vec{f} \qquad (20)$$

где $\mathscr{A}$ - оператор порядка $2b$. Вопросы существования и единственности решения смешанных задач для систем (20) в классе регулярных функций (т.е. решения, имеющего непрерывные производные, входящие в систему) исследованы в [10] с помощью понятия фундаментальной матрицы параболической системы.

Для систем (20) (для них $r = m$) условие дополнительности $P(\mathscr{B})$ форму-лируется, как и в работе Я.Б.Лопатинского [6], в ранговой форме: ранг матрицы

$$\int_{\gamma^+}\mathscr{B}_0 (x_0,t_0,i(\zeta+\tau\nu),p)\, \mathscr{L}_0^{-1} (x_0,t_0,i(\zeta+\tau\nu),p) \quad \mathscr{M}(\tau)d\tau \qquad (21)$$

где γ^+ - простой контур в комплексной плоскости τ, охватывающий все корни τ^+_l полинома L^+ из (17), $\mathscr{M}=(E,\tau E,...,\tau^{b-1}E)$, а E - единичная матрица, равен bm в каждой точке $(x_0, t_0) \in S_T$ и для любых касательных векторов ζ и любых p, удовлетворяющих (16).

Перейдем теперь к вопросу о задании начальных условий. Для систем, параболических по Петровскому, начальные условия задают следующим образом: если наивысший порядок дифференцирования по t функции u^μ равен r_μ, то при $t = 0$ задаются все производные

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}u^\mu(x,t)\right|_{t=0} = \varphi_k^\mu(x),$$

$$x \in \Omega(k = 0,1,...,r_\mu - 1, \mu = 1,...,m) \qquad (22)$$

Запишем начальные условия (22) в виде:

$$C\left(x,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(x,t)\bigg|_{t=0} = \vec{\varphi}(x) \qquad (23)$$

где $\varphi(x)$- вектор-функция размерности $r = \sum_{\mu=1}^{m} r_\mu$;

С - матричный дифференциальный оператор с элементами $C_{\alpha\mu}(\alpha= 1,..., r\,;\; \mu = 1,...,m)$, которые, согласно (22), определяют соотношения:

$$\begin{cases} C_{r_o+r_1+...r_{\mu-1}+\beta,\mu}(x,i\xi\lambda,p\lambda^{2b}) = (p\lambda^{2b})^\beta \\ C_{r_o+r_1+...r_{\mu-1}+\beta,\mu'}(x,i\xi\lambda,p\lambda^{2b}) = 0 \end{cases} \begin{matrix} (\beta=0,1,..., r_\mu - 1; \\ \mu,\ \mu' = 1,..., m;\ \mu\neq\mu'; \\ r_0 = 0) \end{matrix} \qquad (24)$$

Определим главную часть матрицы C точно так же, как для матрицы $\mathscr{B}$. Пусть $\gamma_{\alpha\mu}$ - степень полинома $C_{\alpha\mu}(x, i\xi\lambda, p\lambda^{2b})$ относительно λ и $\gamma_{\alpha\mu} = 0$ при $C_{\alpha\mu} = 0$, а $p_\alpha = max(\gamma_{\alpha\mu} - t_\mu)$.

Сумму $C^0_{\alpha\mu}$ всех членов полинома $C_{\alpha\mu}$, удовлетворяющих условию однородности:

$$C^0_{\alpha\mu}(x, i\xi\lambda, p\lambda^{2b}) = \lambda^{\rho_\alpha+t_\mu}C^0_{\alpha\mu}(x, i\xi, p) \qquad (25)$$

называют главной частью $C_{\alpha\mu}$, а матрицу C_0 с элементами $C^0_{\alpha\mu}$ - главной частью матрицы С.

Для начальных условий (22), полагая $t_\mu = 0$ $(\mu = 1,...,m)$, получим $\rho_\alpha = 2b\beta$ для всех $\alpha=r_0+ r_1+...+r_{\mu-1}+\beta$ $(\beta=0,1,...,-1, r_\mu-1;\; \mu = 1,..., m;\; r_0 = 0)$.

Выясним, какому условию должна удовлетворять матрица С, чтобы можно было из системы (1) и начального условия (23) только с помощью операций дифференцирования и решения линейных алгебраических систем однозначно определить значения производных из (23). При этом потребуем, чтобы искомое условие одинаково формулировалось для всех параболических по Петровскому систем (1) и чтобы в него входили только главные части матриц $\mathscr{L}$ и С, т.е. матрицы $\mathscr{L}_0$ и C_0. Следовательно, такими же желаемыми свойствами должна обладать система:

$$\mathscr{L}_0\left(x,0,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(x,t) = \vec{f}(x,t) \qquad (26)$$

и начальные условия:

$$C_0\left(x,0,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(x,t)\bigg|_{t=0} = \vec{\varphi}(x) \qquad (27)$$

Если в равенства (26) и (27) подставлять всевозможные вектор функции $\vec{u}(t)$, не зависящие от x, то они перейдут в

$$\mathscr{L}_0\left(x,0,0,\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(t) = \vec{f}(x) \qquad (28)$$

$$C_0\left(x,0,0,\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(t)\bigg|_{t=0} = \vec{\varphi}(x) \qquad (29)$$

Для того чтобы можно было однозначно определить из этих равенств $\frac{d^k u^\mu(t)}{\partial t^k}$ $(k \geq 0)$ необходимо, чтобы (28) и (29) составляли задачу Коши для сис-темы обыкновенных дифференциальных уравнений (28), однозначно разрешимую при любых $\vec{f}$ и $\vec{\varphi}$ и любом фиксированном $x \in \Omega$.

Имеем

$$\det\mathscr{L}_0(x,0,0,p) = L(x,0,0,p) = \gamma(x)\cdot p^r \qquad (30)$$

причем в силу условия параболичности системы (1) (по определению 2) $\gamma(x) \equiv 0$. Здесь r - степень полинома $L(x,t,i\xi,p)$ по p.

Для вывода алгебраического условия, являющегося критерием однозначной разрешимости задачи (28)-(29) при любых $\vec{f}$ и $\vec{\varphi}$, достаточно рассмотреть эту задачу при $\vec{f} = 0$. Для того, чтобы начальные условия (23) обладали упомянутыми выше желаемыми свойствами, необходимо, чтобы выполнялось следующее условие [2] :

Условие $\boldsymbol{P}(C)$: строки матрицы:

$$D(x,p) = C_0(x,0,p)\,\mathscr{L}_0(x,0,0,p) \qquad (31)$$

линейно независимы по модулю полинома:

$$p^r = \frac{1}{\gamma(x)} L(x,0,0,p) \qquad (32)$$

при любом $x \in \Omega$. .

Условие (31) (называемое условием дополнительности для матрицы С) является также и достаточным для наличия у матрицы С желаемых свойств.

Таким образом, рассматриваемая нами краевая задача для параболической системы сформулируется в следующем виде: найти вектор $\bar{u}(x,t) = (u^1(x,t),\ldots, u^m(x,t))$, для которого:

$$\mathscr{L}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(x,t) = \vec{f}(x,t), \qquad (x,t)\in Q_T \qquad (33_1)$$

$$\mathscr{B}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(x,t)\Big|_{S_T} = \vec{\Phi}(t), \qquad t\in[0,T] \qquad (33_2)$$

$$\mathscr{C}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(x,t)\Big|_{t=0} = \vec{\varphi}(x), \qquad x\in\Omega \qquad (33_3)$$

где $\mathscr{L}$ - матричный дифференциальный оператор размерности m × m, параболический в смысле определения 2; $\vec{f}(x,t)$, $\vec{\Phi}(t)$ и $\vec{\varphi}(x)$ - вектор-функции размерности m, br и r соответственно: $\mathscr{B}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ и $\mathscr{C}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ - матричные дифференциальные операторы размерностей $(br)\times m$ и $r\times m$, удовлетворяющие условиям дополнительности $\boldsymbol{P}(\mathscr{B})$ и $\boldsymbol{P}(C)$. Алгебраические условия $\boldsymbol{P}(\mathscr{B})$ и $\boldsymbol{P}(C)$ являются достаточными для разрешимости задачи (33) [3].

Для формулировки условий разрешимости задачи (33) в классе гельдеровских функций будем использовать пространства функций $H^l(\Omega)$, $H^l(0,T)$, и $H^{l,\frac{l}{2b}}(\bar{Q}_T)$, где l - нецелое положительное число, один верхний индекс l характеризует гельдеровость по переменной $x\in\bar{\Omega}$ или $t\in[0,T]$, в двойном верхнем индексе $\left(l,\frac{l}{2b}\right)$ индекс l характеризует гельдеровость по пространственной переменной x, а индекс $l/2b$ - гельдеровость по t. Определение норм этих пространств дано в [2].

Более общий (по сравнению с определениями 1 и 2) класс параболичес-ких систем введен в работе [3].

<u>Определение 3</u> [3]. Будем называть оператор $\mathscr{L}$ параболическим, если:

1. оператор $L = \det\mathscr{L}$ является $2b$-параболическим в смысле определения 1;
2. существуют такие целые числа s_k и t_k $(k = 1,\ldots, m)$, что степень полинома $L_{kj}(x,t,i\xi\lambda,p\lambda^{2b})$ не превосходит $s_k + t_j$ (если $s_k + t_j < 0$, то $L_{kj} = 0$) и, кроме того

$$\sum_{k=1}^{m}\left(s_k + t_k\right) = 2br$$

где r - степень полинома $L(x,t,i\xi,p)$ по переменной p.

Системы, параболические по Петровскому - это такие параболические системы, для которых

$$s_1 = \ldots = s_m = 0,\ t_j = 2br_j,\ (j = 1,\ldots, m)$$

Воспользуемся теоремой об однозначной разрешимости в классе гельдеровских функций начально-краевых задач для параболических в смысле определения 3 систем уравнений, доказательство которой дано В.А.Солонниковым [3] (см.теорема 10.1 [2]).

Для систем, параболических по Петровскому, эта теорема сформулируется следующим образом.

Теорема. Пусть коэффициенты операторов L_{kj} принадлежат классам $H^{l,\frac{l}{2b}}(\bar{Q}_T)$, операторов $B_{q\mu}$ - классам $H^{l-\sigma_q,\frac{1}{2b}(l-\sigma_q)}(\bar{S}_T)$, операторов C_{aj} - классам $H^{l-\rho_a}(\bar{\Omega})$ и $S \in H^{l+t_{max}}$, $t_{max} = \max_{\mu=1,\ldots m} t_\mu$, $t_\mu = 2br_\mu$, где $l > 0$ - нецелое число.

Тогда задача (33) имеет единственное решение в классе вектор-функций $u(x,t)$, у которых

$$u^\mu(x,t)\in H^{l-t_\mu,\frac{1}{2b}(l-t_\mu)}(\bar{Q}_T) \quad \text{при любых}$$

$$f^\mu(x,t)\in H^{l,\frac{l}{2b}}(Q_T),\ (\mu=1,\ldots, m),\ \Phi^q(t)\in H^{\frac{1}{2b}(l-\sigma_q)}[0,T]$$

$(q=1,\ldots, br)$, $\varphi^\alpha(x)\in H^{l-\rho_a}(\Omega)$, $(a=1,\ldots,r)$, удовлетворяющих условиям согласования, необходимым для существования решения из указанного класса. Решение подчиняется неравенству:

$$\sum_{\mu=1}^{m}\left\|u^\mu(x,t)\right\|_{H^{l+t_\mu,\frac{l+t_\mu}{2b}}(\bar{Q}_T)} \leq C\left(\sum_{\mu=1}^{m}\left\|f^\mu(x,t)\right\|_{H^{l,\frac{l}{2b}}(\bar{Q}_T)} + \right.$$

$$\left.+\sum_{q=1}^{br}\left\|\Phi^q(t)\right\|_{H^{\frac{1}{2b}(l-\sigma_q)}(0,T)} + \sum_{\alpha=1}^{r}\left\|\varphi^\alpha(x)\right\|_{H^{l-\rho_\alpha}(\bar{\Omega})}\right) \qquad (34)$$

Указанное в теореме соотношение (34) между гладкостью известных функций и решения является точным, а наложенные на коэффициенты уравнений ограничения являются необходимыми для того, чтобы каждый член любого уравнения системы принадлежал тому же классу, что и свободный член (то же верно для краевых и начальных условий). Определение поверхности S, принадлежащей классу H^l, $l > 1$см. в [2].

В теореме 10.1 [2] требуется, чтобы векторы $\vec{f}$, $\vec{\Phi}$, $\vec{\varphi}$ удовлетворяли условиям согласования минимального порядка, т.е. только тем условиям, которым удовлетворяют $\vec{f} = \mathscr{L}\vec{u}$, $\vec{\Phi} = \mathscr{B}\vec{u}\big|_{S_T}$ и $\vec{\varphi} = \mathscr{C}\vec{u}\big|_{t=0_T}$ при функции $\vec{u}$ из заданного класса гельдеровских функций. В том виде, в котором эта теорема сформулирована нами выше для параболических по Петровскому систем уравнений, условия согласования минимального порядка выполняются автоматически.

Будем полагать, что $r_\mu \geq 1$ ($\mu = 1,..., m$). Тогда, согласно вышеприведен-ной теореме, для существования единственного решения задачи (33) в классе гельдеровских функций достаточно потребовать выполнения при некотором нецелом $l > 0$ нижеследующих условий A_l, B_l, C_l.

Условие A_l. Система дифференциальных уравнений в (33), определенная в цилиндре $Q_T = \Omega \cdot (0,T)$ пространства переменных $(x,t) \in E_{n+1}$, $x \in E_n$, $t \in E_1$, с границей S множества Ω, принадлежащей $H^{l+t_{max}}$, $t_{max} = max\, t_\mu$, $\mu = 1,..., m$, $t_\mu = 2br_\mu$, является параболической по Петровскому (в смысле определения 2) с коэффициентами операторов $L_{k\mu}$, принадлежащими пространству $H^{l,\frac{1}{2b}}(\bar{Q}_T)$ и с правой частью $\vec{f}\,(x,t)=(f^1(x,t),...,f^m(x,t))$, где $f^\mu(x,t) \in H^{l,\frac{1}{2b}}(\bar{Q}_T)$ $(\mu = 1,..., m)$.

Условие B_l. Матричный оператор $\mathscr{B}$ краевых условий задачи (33) удовлетворяет условию дополнительности ***P(B)***, коэффициенты операторов $B_{k\mu}$ принадлежат пространству $H^{l-\sigma_q,\frac{1}{2b}(l-\sigma_q)}(\bar{S}_T)$ и для любого q=1,...,br правые части $\Phi^q(t)$ (q=1,...,br) краевого условия принадлежат пространству $H^{\frac{1}{2b}(l-\sigma_q)}[0,T]$.

Условие C_l. Матричный оператор C начального условия задачи (33) удовлетворяет условию дополнительности P(C), коэффициенты операторов $C_{a\mu}$ принадлежат пространству $H^{l-\rho_a}(\bar{\Omega})$ и компоненты $\varphi^\alpha(x)$ ($\alpha = 1,..., r$) правой части $\vec{\varphi}\,(x)$ начального условия принадлежат пространству $H^{l-\rho_a}(\bar{\Omega})$.

К системам уравнений, параболическим в смысле И.Г.Петровского, сводятся некоторые нестационарные задачи фильтрации. Так, неустановившееся движение однородной капельной жидкости в трещиновато-пористых средах с учетом сжимаемости трещин описывается следующей системой линейных параболических уравнений [8]:

$$\begin{cases} \eta\nabla^2 p_1 = \varepsilon_1 \dfrac{\partial p_1}{\partial t} - \dfrac{(p_2 - p_1)}{\tau} \\ \eta\varepsilon_2\nabla^2 p_2 = \dfrac{\partial p_2}{\partial t} + \dfrac{(p_2 - p_1)}{\tau} \end{cases} \qquad (43)$$

Здесь $\nabla^2 p_i = \Delta p_i$ - оператор Лапласа; p_1 и p_2 - давления в трещинах (среда i = 1) и пористых блоках (среда i = 2) соответственно и введены следующие обозначения:

$$\eta = \frac{k_1}{\mu\beta_2^*}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\beta_1^*}{\beta_2^*}, \ \varepsilon_2 = \frac{k_2}{k_1}, \quad \tau = \frac{\mu\beta_2^*}{\alpha_0}$$

Величина α_0 определяется из соотношения для интенсивности перетока q объема слабосжимаемой жидкости, вытекающего из блоков в трещины за единицу времени:

$$q = \alpha_0 \frac{\rho_0}{\mu}(p_2 - p_1) \ ,$$

p_0 - плотность жидкости, кг/м^3;
μ - вязкость жидкости, Па·с;
константы k_1 и k_2 - проницаемости обеих сред, м^2;
β_i^* - коэффициенты упругоемкости обеих сред, Па$^{-1}$;
η - пьезопроводность пористого пласта, м^2/сек.

Нетрудно показать, что система уравнений (43), описывающая задачу распределения полей давлений $p_1(x,y,t)$ и $p_2(x,y,t)$, соответствующих трещинам и блокам трещиновато-пористой среды, в плоском кольцевом пласте:

$$\Omega = \{(x,y) : (x-a_2)^2 + y^2 \leq R^2 \vee (x-a_1)^2 + y^2 \geq r_c^2\} ,$$

где $(a_1,0)$ - центр совершенной скважины радиуса r_c ($r_c < R$, $1 < a_1 < a_2$) является системой уравнений, параболической по Петровскому, и к ней применима вышеприведенная теорема о разрешимости в классе гельдеровских функций. Доказательство этого факта и метод построения гельдеровского решения поставленной задачи фильтрации, ввиду ограниченности объема, будут изложены отдельно.

Литература

1. *О.А.Ладыженская, Н.Н.Уральцева.* Краевая задача для линейных и квазилинейных уравнений и систем параболического типа //Известия АН СССР. Серия математическая. -1963. -Т.27. -С.161-240.
(*O.A.Ladyzhenskaya, N.N.Uraltseva.* Boundary-value problems for linear and quasi-linear equations and systems of parabolic type //Izvestiya AN SSSR. Seriya Matematicheskaya. -1963. –Vol.27. -P161–240)
2. *О.А.Ладыженская, В.А.Солонников, Н.Н.Уральцева.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Недра, 1967.
(*O.A.Ladyzhenskaya, V.A.Solonnikov, N.N.Uraltseva.* Linear and Quasilinear Parabolic Equations. M.: Nedra, 1967)
3. *В.А.Солонников.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида //Труды Математического института АН СССР. -1965, -Т.83.
(*V.A.Solonnikov.* On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form //Trudy Matematicheskogo Instituta AN SSSR. -1965. –Vol.83)
4. *С.Д.Эйдельман.* Параболические системы. М.: Недра, 1964.
(*S.D.Eidelman.* Parabolic systems. M.: Nedra, 1964)

5. *Т.Я.Загорский.* Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. Львов, 1961.

(*T.Ya.Zagorskiy.* Smeshanniye zadachi dlya sistem differentsialnyh uravneniy s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa. Lvov, 1961)

6. *Я.Б.Лопатинский.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям //Украинский математический журнал. -1953. -Т.5. -№2. -С.123-151.

(*Ya.B.Lopatinskiy.* Ob odnom sposobe privedeniya granichnyh zadach dlya sistemy differentsialnyh uravneniy ellipticheskogo tipa k regulyarnym integralnym uravneniyam //Ukrainskiy matematicheskiy jurnal. -1953. -T.5. -№2. -S.123-151.)

7. *В.Н.Николаевский, К.С.Басниев, А.Т.Горбунов, Г.А.Зотов.* Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970.

(*V.N.Nikolayevskiy, K.S.Basniyev, A.T.Gorbunov, G.A.Zotov.* Mechanics of saturated porous media. M.: Nedra, 1970)

8. *К.С.Басниев, Н.М.Дмитриев, Р.Д.Каневская, В.М.Максимов.* Подземная гидромеханика. М. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.

(*K.S.Basniyev,* N.M.Dmitriyev, R.D.Kanevskaya, V.M.Maksimov. Podzemnaya gidromehanika. M. Ijevsk: Institut kompyuternykh issledovaniy, 2005)

9. *Н.Фридман.* Уравнения с частными производными параболического типа. /Пер.с англ. М.: Мир, 1968.

(*A.Friedman.* Partial Differential Equations of Parabolic Type. M.: Mir, 1968)

10. Линейные уравнения математической функции /Под ред. С.Г.Михлина. М.: Недра, 1964.

(Lineyniye uravneniya matematicheskoy funktsii /Pod red. S.G.Mihlina. M.: Nedra, 1964)

Solvability conditions at helder's functions of initial-boundary problems for parabolic by Petrovsky systems of equations

O.A.Dyshin
("OilGasScientificResearchProject" Institute)

Abstract

In this article, the solvability conditions of a class of helder functions for linear parabolic systems of differential equations (by Petrovsky) with variable coefficients have been demonstrated. The correlations between the smoothing of known functions of the problem and the smoothing of the solution itself are exact. The constraints on coefficients that follow from solvability conditions are necessary for both boundary and initial conditions. We have applied these results to unsteady filtration problems for a homogeneous liquid in deformable fissure-porosity media.

Petrova görə parabolik bərabərlik sistemləri üçün başlanğıc –yan məsələlərin gelderov funksiyalarında həlli şərtləri

O.A.Dışin
("Neftqazelmitədqiqatlayihə" İnstitutu)

Xülasə

Gelderov funksiyaları sinfində başlanğıc – yan məsələlərinin, İ.Q.Petrovskinin fikrincə parabolik olan, dəyişkən əmsalı differensial bərabərliklərin xətti sistemi üçün həlli mümkün olan şərtləri alınmışdır. İşdən əldə edilmiş məsələyə daxil olan məlum funksiyaların düzgünlüyü ilə həllin özünün düzgünlüyü arasındakı nisbət dəqiqdir. Məsələlərin həlli şərtlərilə bərabərlik əmsalı qoyulan məhdudiyyət vacibdir, bu həm də başlanğıc və yan şərtlər üçün düzgündür. Deformasiyaya uğramış çatlı – məsaməli mühitdə bircins mayenin təyin edilməməsi məsələlərə əlavədə verilmişdir.