УДК 517.958:532.546

РАЗРЕШИМОСТЬ В ГЕЛЬДЕРОВЫХ ФУНКЦИЯХ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОМ КОЛЬЦЕВОМ ПЛАСТЕ

О.А.Дышин
(НИПИ "Нефтегаз")

Показано, что система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих нестационарную фильтрацию однородной жидкости в трещиновато-пористой среде, является параболической по Петровскому системой уравнений. Рассмотрена начально-краевая задача нестационарной фильтрации жидкости в трещиновато-пористом пласте кольцевой формы при граничных условиях на внешней границе пласта и стенках скважины, заданных с учетом наличия двух сред. Установлены условия существования и единственности решения данной задачи в классе гельдеровских функций.

Ключевые слова: трещиновато-пористая среда, параболичность по Петровскому системы уравнений, класс гельдеровских функций.

Адрес связи: oleg.dyshin@mail.ru

DOI: 10.5510/OGP20120200115

Введение

Ряд крупнейших месторождений нефти приурочен к трещиновато-пористым породам, в которых существует развитая система трещин, полностью или частично, наряду с порами, обусловливающих фильтрационные свойства среды.

Характерные свойства течения в трещиноватой пористой породе проявляются только при неустановившихся процессах, при которых существуют два давления и возникает обмен жидкостью между порами блоков и трещинами. Основные положения теории нестационарной фильтрации в трещиновато-пористых средах сформулированы Г.И.Баренблаттом, Ю.П.Желтовым и И.Н.Кочиной [1], а затем развиты многими исследователями (см. библиографию в [2,3]). Постановка краевых задач для неустановившейся фильтрации жидкости в трещиноватых породах уточнена в работе [4].

Как отмечается в [5], из возможных физически оправданных постановок краевых задач предпочтение, по-видимому, надо отдать построению решений для давления p_2 в трещинах при учете их сжимаемости $\varepsilon_2\beta \neq 0$ (β - эффективная сжимаемость в элементарном микрообъеме первичных пор). Получаемая при этом система уравнений описывает при конечных значениях параметра ε_2 фильтрацию однородной капельной жидкости в кавернозно-трещиноватых пористых средах.

В данной работе рассматривается именно такая система уравнений неустановившегося движения жидкости в трещиновато-пористом пласте. Показано, что эта система уравнений является параболической в смысле И.Г.Петровского [6] и при граничных условиях на внешней границе пласта и стенках скважины, заданных с учетом наличия двух сред, задача нестационарной фильтрации жидкости в трещиновато-пористом кольцевом пласте имеет единственное решение в классе гельдеровских функций.

1. Постановка задачи и ее разрешимость

Часто в горных породах, помимо пористых (межгранулярных), относительно мелких пор, имеются гораздо более крупные вторичные поры, представленные отдельными или же соединенными между собой трещинами и кавернами (более позднего механического или химического происхождения). Эти породы математически моделируются средой с двойной пористостью [7], у которой отдельно взятые первичные поры составляют сплошное пространство с пористостью m_1 и проницаемостью k_1 и аналогично вторичные поры - взаимопроникающее с первым пространство пористости m_2 и проницаемости k_2. Кроме того, допускается переток жидкости из одной системы пор в другую. Обозначим индексом i номер среды: i = 1 - трещины, i = 2 - блоки. Функцию перетока из i - среды в j - среду (i, j = 1, 2) будем обозначать через q_{ij}, при этом $q_{21} = q$, $q_{12} = -q$, т.е. $q_{21} = -q_{12}$. Очевидно, что $q_{11} = q_{22} = 0$.

Систему вторичных пор допустимо рассматривать как сплошную среду, если только их характерный микромасштаб (средняя длина трещин, диаметр каверны) гораздо меньше масштаба рассматриваемых областей движения [1].

Сделаем следующие предположения:

1) жидкость слабосжимаема, т.е. уравнение состояния определяется формулой $\rho = \rho_0 e^{\beta_ж (p - p_0)}$,

ρ - плотность жидкости,

$\beta_ж$ - коэффициент объемного сжатия жидкости, равный отношению относительного изменения объема жидкости $(dV_ж / V_ж)$ к изменению давления (dp);

2) вязкость постоянна, $\mu = const$;

3) обе среды - трещины и пористые блоки - упругие, где пористость (вследствие малой деформации твердой фазы) зависит от давления по формуле:

$$m_i = m_{0i} + \beta_{ci} (p_i - p_o)\ ,\ \ i = 1, 2\ , \qquad (1.1)$$

расписанной для каждой из сред, составляющих коллектор, где $\beta_c = \dfrac{dV_n}{dp}$ - коэффициент упругости пласта, dV_n - изменение объема пор в элементе пласта, имеющем объем V, при изменении давления на величину dp;

4) проницаемости обеих сред постоянны:

$$k_1 = const,\ k_2 = const;$$

5) происходит обмен между трещинами и блоками, масса жидкости, перетекающей из блоков в трещины, подчиняется соотношению:

$$q = a_0 \cdot \frac{\rho_0}{\mu}(p_2 - p_1) \qquad (1.2)$$

где a_0 - безразмерный коэффициент, зависящий от геометрических характеристик блоков проницаемости k_2, характерного линейного размера l и безразмерных величин, характеризующих форму блоков; $a_0 = \tilde{\alpha}\ k_2/l^2$; при этом считается, что плотность жидкости ρ_0 мало изменяется на интервале давлений от p_1 и p_2 - давления в трещинах и блоках соответственно;

6) для сред i = 1, 2 выполняется линейный закон Дарси, согласно которому дифференциальные уравнения движений записываются в виде:

$$\rho \vec{w}_i = -gradP_i \qquad (1.3)$$

где

$$P_i = \int \frac{k_i(p_i)}{\mu(p_i)}\rho(p_i)dp_i + const \qquad (1.4)$$

- обобщенная функция Лейбензона для i - среды.

При этих предпосылках выражения функций Лейбензона (1.4), с точностью до малых величин, имеют вид:

$$P_i \approx \frac{\rho_0 k_i}{\mu_i} p_i + const \qquad (i = 1, 2) \qquad (1.5)$$

Подставляя (1.3) в уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial(m_i\rho_i)}{\partial t} + divp_i\vec{w}_i - q_{ji} = 0 \qquad (i = 1,2) \qquad (1.6)$$

приходим к системе уравнений неустановившейся фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористой среде:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 P_1 &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(p_1)m_1(p_1)\right] - \frac{a_0\rho_0}{\mu}(p_2 - p_1), \\ \nabla^2 P_2 &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(p_2)m_2(p_2)\right] + \frac{a_0\rho_0}{\mu}(p_2 - p_1), \end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

где $\nabla^2 P_i = \frac{\partial^2 P_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_i}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа от функции $P_i(x, y, z, t)$.

Так как

$\rho(p_i)m_i = \rho_0[m_{oi} + \beta_i^*(p_i - p_0) + \beta_ж \cdot \beta_{ci}(p_i + p_0)^2] \approx$

$\approx \rho_0[m_{oi} + \beta_i^*(p_i - p_0)],\qquad i = 1, 2$

где последнее слагаемое отброшено вследствие его малости; $\beta_i^* = \beta_{ci}^* + m_{oi} \cdot \beta_ж$ - коэффициенты упругости обеих сред, то:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(p_i)m_i(p_i)\right] = \rho_0\beta_i^*\frac{\partial p_i}{\partial t} \qquad (1.8)$$

Вводя обозначения:

$$\eta = \frac{k_1}{\mu\beta_2^*},\quad \varepsilon_1 = \frac{\beta_1^*}{\beta_2^*},\quad \varepsilon_2 = \frac{k_1}{k_2},\quad \tau = \frac{\mu\beta_2^*}{a_0}$$

и учитывая (1.8), систему (1.7) можно записать в виде [8]:

$$\left.\begin{aligned} \eta\nabla^2 p_1 &= \varepsilon_1\frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{(p_2 - p_1)}{\tau}, \\ \eta\nabla^2 p_2 &= \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{(p_2 - p_1)}{\tau}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.9)$$

Параметр τ имеет размерность времени и называется временем запаздывания, он характеризует отставание процесса перераспределения давления в трещиновато-пористой среде по сравнению с пористым пластом с пьезопроводностью η.

Рассмотрим краевую задачу распределения

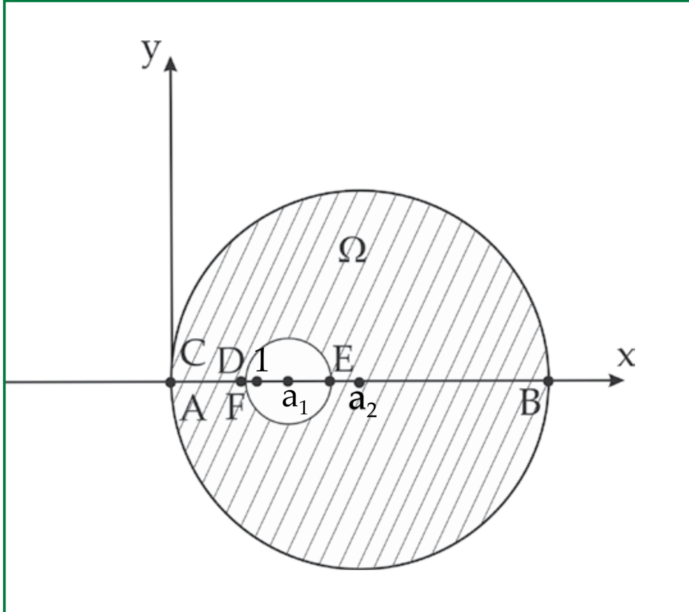

Рис.1. Кольцевой пласт Ω

полей давлений $p_1(x, y, t)$ и $p_2(x, y, t)$, соответствующих трещинам и блокам трещиновато-пористой среды, в плоском кольцевом пласте:

$$\Omega = \{(x, y) : (x-a_2)^2 + y^2 \le R_k^2 V (x-a_1)^2 + y^2 \ge r_c^2\}, \qquad (1.10)$$

где $(a_1, 0)$ - центр совершенной скважины радиуса r_c, при этом $r_c < R_k$, $1 < a_1 < a_2$ (рис.1).

Дифференциальные уравнения задачи запишутся в виде системы:

$$\left.\begin{aligned} \eta\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}\right) &= \varepsilon_1\frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{(p_2 - p_1)}{\tau}, \\ \eta\varepsilon_2\left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2}\right) &= \frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{(p_2 - p_1)}{\tau}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.11)$$

справедливой для всех $x \in Q_T = \Omega \times (0, T)$,

где T - время эксплуатации скважины.

Начальные и граничные условия сформулируются следующим образом.

В начальный момент времени давления в трещинах и блоках одинаковы и равны p_0:

$$p_1(x, y, 0) = p_2(x, y, 0) = p_0 \qquad (1.12)$$

На внешней границе пласта Г, являющейся окружностью радиуса R_k с центром в начале координат плоскости (x, y) и представляющей собой контур питания пласта, граничное условие запишем в виде:

$$(p_2(x, y, t) - p_1(x, y, t))\,\big|_{(x,\,y)\in\Gamma} = 0,\quad t \in (0, T) \qquad (1.13)$$

Условие на стенке скважины, с учетом наличия двух сред (ср. с граничным условием из [8]), имеет вид:

$$\int\limits_{\Gamma_c} \sigma_1\frac{\partial p_1(x,y,t)}{\partial n} + \sigma_2\frac{\partial p_2(x,y,t)}{\partial n}\bigg|_{(x,y)\in\Gamma_c} ds = q(t),\ t \in (0, T) \qquad (1.14)$$

где левая часть выражается криволинейным интегралом 1-го рода по контуру скважины Γ_c;
s - длина дуги кривой Γ_c;
$\frac{\partial p_i}{\partial n}$ - производная по нормали к Γ_c;
$q(t)$ - дебит скважины;
$\sigma = k_i \cdot h/\mu$ $(i = 1, 2)$ - коэффициент гидропроводности (К.Г.) i - среды.

Так как для любой дифференцируемой на Γ_c функции $f(x, y)$ имеем:

$$\int_{\Gamma_c} \frac{\partial f(x,y)}{\partial n} ds = r_c \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin\varphi \right)_{\substack{x = r_c \cdot \cos\varphi \\ y = r_c \cdot \sin\varphi}} d\varphi$$

где (cosφ, sinφ) - координаты единичного вектора нормали $\vec{n}$ в текущей точке (x, y) контура Γ_c; $\varphi = (\widehat{\vec{n}, 0x})$, то условие (1.13) в случае дифференцируемых по x и y функций $p_i(x, y, t)$ $(i = 1, 2)$ можно записать в виде обычного интеграла Римана по переменной φ:

$$r_c \int_0^{2\pi} \left[\sigma_1 \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} \cdot \cos\varphi + \frac{\partial p_1}{\partial y} \cdot \sin\varphi \right) + \right. \\ \left. + \sigma_2 \left(\frac{\partial p_2}{\partial x} \cdot \cos\varphi + \frac{\partial p_2}{\partial y} \cdot \sin\varphi \right) \right] d\varphi = q(t), t \in (0, T) \qquad (1.15)$$

2. Параболичность по Петровскому системы уравнений (1.11)

Приведем определение параболической по Петровскому системы уравнений.

Пусть $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ - область в пространстве переменных $(x, t) \in E_{n+1}$, где $x \in \Omega \subset E_n$, $t \in [0, T]$ (E_n - n-мерное евклидово пространство). Обозначим через $L\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ произвольный линейный дифференциальный оператор с комплексными коэффициентами, зависящими от $(x, t) \in Q_T$. Ясно, что в любой точке $(x, t) \in Q_T$ функция $L(x,t,i\xi,p)$, где $i = \sqrt{-1}$ ξ и p - соответственно вещественный и комплексный скалярный параметр, является полиномом относительно ξ и p. Пусть, далее, b - некоторое положительное целое число и пусть степень полинома $L(x,t,i\xi\lambda,p\lambda^{2b})$ относительно λ равна $2br$, где $r > 0$ - целое число. Обозначим через L_0 главную часть полинома L, т.е. сумму всех членов L, для которых:

$$L_0(x,t,i\xi\lambda,p\lambda^{2b}) = \lambda^{2br} L_0(x,t,i\xi,p) \qquad (2.1)$$

Определение 1 [6]. Оператор L называется параболическим ($2b$-параболическим) в точке (x, t), если при любом вещественном ξ корни p_ν полинома $L_0(x,t,i\xi,p)$ по переменной p удовлетворяют условию: $Re p_\nu \le \delta |\xi|^{2b}$ $(\delta > 0)$ (2.2)

Для параболического оператора L числа b и r определяются единственным образом:

r - это степень полинома $L(x,t,i\xi,p)$ по p;

$2br$ - по переменной ξ.

Оператор L называется равномерно параболическим в области Q_T, если он является параболическим в каждой точке этой области и неравенство (2.1) выполняется в каждой точке $(x, t) \in Q_T$ с одним и тем же числом $\delta > 0$.

Для уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами $b = 1$, $L_0(x,t,i\xi,p) = p + a(x,t)\xi^2$ и условие равномерной параболичности в данном случае обычно записывают в виде:

$$\nu_1 \le a(x,t) \le \nu_2,\ \nu_2 > \nu_1 > 0,\ (x, t) \in Q_T, \qquad (2.3)$$

откуда следует $Re p_\nu = p_\nu = -a(x,t)\xi^2 \le -\nu|\xi|^2$, так что $\delta = \nu_1$.

Определение 2 [6]. Матричный дифференциальный оператор $\mathcal{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ с элементами $L_{k\mu}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ $(k, \mu = 1,\dots,m)$ называется параболическим в смысле И.Г.Петровского, если:

1) оператор $L\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \det \mathcal{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ является $2b$-параболическим в смысле определения 1;

2) степень полинома $L_{k\mu}(x,t,i\xi\lambda,p,\lambda^{2b})$ $(k, \mu = 1,\dots, m)$ относительно l не превосходит $2br_\mu$ и

$$L_{k\mu}(x,t,i\xi,p) = \delta_{k\mu} p^{r_\mu} + L'_{k\mu}(x,t,i\xi,p) \qquad (2.4)$$

где $L'_{k\mu}$ - полином, не содержащий p^{r_μ};

$\delta_{k\mu}$ - символ Кронекера.

Главной частью полинома $L_{k\mu}(x,t,i\xi,p)$ называют сумму $L^0_{k\mu}$ всех членов $L_{k\mu}$ для которых выполняется условие однородности:

$$L^0_{k\mu}(x,t,i\xi\lambda,p\lambda^{2b}) = \lambda^{2br_\mu} L^0_{k\mu}(x,t,i\xi,p) \qquad (2.5)$$

а матрицу $\mathcal{L}_0$, составленную из $L^0_{k\mu}$, называют главной частью матрицы $\mathcal{L}$. Очевидно, что полином

$$L_0(x,t,i\xi,p) = \det L_0(x,t,i\xi,p) \qquad (2.6)$$

является главной частью полинома L.

Для систем, параболических по И.Г.Петровскому, характерно то, что степень однородности полиномов $L^0_{k\mu}$, равная $2br_\mu$, не зависит от k и такие системы могут быть разрешены относительно старших производных по t $\frac{\partial^{r_\mu}}{\partial t^{r_\mu}} u^\mu$

Полагая, что среда $i = 1$ упругая, т.е. $\beta_1^* \neq 0$ и следовательно $\varepsilon_1 \neq 0$, после деления обеих частей первого уравнения системы (1.9) на ε_1, запишем ее в виде:

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\eta}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2} \right) - \frac{(p_2 - p_1)}{\varepsilon_1 \tau} = 0 \\ &\frac{\partial p_2}{\partial t} - \eta\varepsilon_2\left(\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} \right) + \frac{(p_2 - p_1)}{\tau} = 0 \end{aligned} \right\} \qquad (2.7)$$

Покажем, что матричный дифференциальный оператор $\mathcal{L}\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$, определяемый системой уравнений (1.11), является параболическим по Петровскому. В самом деле, полагая $\tilde{x} = (x, y)$, будем иметь:

$$\mathcal{L}\left(\tilde{x}, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \qquad (2.8)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\eta}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\varepsilon_1 \tau} & -\frac{1}{\varepsilon_1 \tau} \\ -\frac{1}{\tau} & \frac{\partial}{\partial t} - \eta\varepsilon_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$L\left(\tilde{x},t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)=\left[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\eta}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{\varepsilon_1\tau}\right]\times$$
$$\times\left[\frac{\partial}{\partial t}-\eta\varepsilon_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\frac{1}{\tau}\right]-\frac{1}{\varepsilon_1\tau^2} \qquad (2.9)$$

Главной частью оператора $L\left(\tilde{x},t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ будет оператор

$$L_0\left(\tilde{x},t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)=$$
$$=\left[\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\eta}{\varepsilon_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]\left[\frac{\partial}{\partial t}-\eta\varepsilon_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]$$

для которого выполняется равенство (2.1) с $r=2, b=1$.

Корнями полинома:

$$L_0(\tilde{x},t,i\xi,p)=p^2+2\xi^2\eta\left(\frac{1}{\varepsilon_1}+\varepsilon_2\right)p+4\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\xi^4\eta^2 \qquad (2.10)$$

являются: $p_1=-2\xi^2\frac{\eta}{\varepsilon_1}$, $p_2=-2\xi^2\eta\varepsilon_2$ (2.11)

Они удовлетворяют неравенству вида (2.2):

$$Re p_\nu \le \delta|\xi|^2 \qquad \nu=1,2 \qquad (2.12)$$

при любом $\delta>0$. Так что оператор L будет равномерно параболическим в области Q_T. Справедливость равенств (2.4) при k, $\mu=1, 2$ вытекает с очевидностью из (2.9). Таким образом, система (1.11) будет параболической в смысле И.Г.Петровского.

3. Условия разрешимости задачи в гельдеровских функциях

Вопросы разрешимости начально-краевых задач для линейных систем дифференциальных уравнений, параболических в смысле И.Г.Петровского (и в более широком смысле), исследованы в [6, 9, 10]. Обзор основных результатов по исследованию общих краевых задач для линейных систем уравнений параболического типа дан в [6].

Основным условием разрешимости краевых задач для линейных параболических систем является выполнение для граничного и начального дифференциального оператора так называемого условия дополнительности, сформулированного впервые в ранговой форме Я.Б.Лопатинским [11]. Разрешимость начально-краевых (смешанных) задач в классе гельдеровских функций доказана в [10] для общего класса параболических систем при выполнении условий дополнительности для начальных и граничных операторов, в предположении гладкости данных задачи, обеспечивающей удовлетворение условий согласования минимального порядка, необходимых для существования решения из указанного класса.

В общих краевых задачах для систем уравнений, параболических в смысле определения 2 в области $Q_T=\Omega\times(0,T)$, Ω - ограниченная область в евклидовом пространстве E_n с границей S, граничные условия задаются равенством:

$$\mathscr{B}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(x,t)\Big|_{S_T}=\vec{\Phi}(t) \qquad (3.1)$$

где $\mathscr{B}$ - матричный дифференциальный оператор, $\vec{\Phi}(t)$ - вектор-функция размерности N, заданная на поверхности:

$S_T=\{(x,t):x\varepsilon S,\ t\varepsilon[0,T]\}$, $\vec{u}(x,t)=(u^1(x,t),\dots,u^m(x,t))$ - вектор неизвестных функций.

Выясним, сколько строк должна иметь матрица $\mathscr{B}$ (т.е. сколько их нужно задавать на границе) и каким алгебраическим условиям эта матрица должна удовлетворять для того, чтобы условие (3.1) порождало хорошо поставленную краевую задачу.

Прежде всего определим главную часть $\mathscr{B}_0$ матрицы $\mathscr{B}$. Обозначим через $B_{q\mu}(q=1,\dots,N,\ \mu=1,\dots,m)$ элементы матрицы $\mathscr{B}$ и через $\beta_{q\mu}$ - степень полинома $B_{q\mu}(x,t,i\xi\lambda,p\lambda^{2b})$ относительно λ;
если $B_{q\mu}=0$ положим $\beta_{q\mu}=0$.

Пусть $\sigma_q=\max\limits_{\mu}(\beta_{q\mu}-t_\mu)$

Тогда $\sigma_q+t_\mu\ge\beta_{q\mu}$.

Главной частью полинома $B_{q\mu}$ называют сумму $B^0_{q\mu}$ всех его членов, удовлетворяющих условию однородности:

$$B^0_{q\mu}(x,t,i\xi\lambda,p,\lambda^{2b})=\lambda^{\sigma_q+t_\mu}\cdot B^0_{q\mu}(x,t,i\xi\lambda,p,) \qquad (3.2)$$

Через $\mathscr{B}_0$ обозначим матрицу с элементами $B^0_{q\mu}$. Таким образом, выбор главной части $\mathscr{B}_0$ матрицы $\mathscr{B}$ зависит от чисел t_j и может быть неоднозначен. Возьмем любую точку $(x_0,t_0)\varepsilon S_T$ и произвольный вещественный вектор $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$. Его можно однозначно представить в виде $\xi=\zeta+\tau\nu$, где $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1})$ - вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности S в точке x_0, ν-единичный вектор внутренней нормали в точке x_0 и τ - вещественный параметр.

Обозначим через $\hat{\mathscr{B}}_0\left(x_0,t_0,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ и $\hat{\mathscr{L}}_0\left(x_0,t_0,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ операторы $\mathscr{B}_0\left(x_0,t_0,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ и $\mathscr{L}_0\left(x_0,t_0,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$, в которых коэффициенты «заморожены» (т.е. зафиксированы) в точке (x_0,t_0), а все младшие члены отброшены.

Рассмотрим полином: $\hat{L}_0(x_0,t_0,i(\zeta+\tau\nu),p)$ (3.3)

как функцию τ на всей комплексной плоскости. Согласно теореме 7.9.1 [6], если полином (3.3) удовлетворяет условию (2.2), то при любых вещественных $\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1}$ и любом комплексном p, удовлетворяющем условиям:

$$Re p\le-\delta_1|\zeta|^{2b}\ (0<\delta_1<\delta),\ |p|+|\zeta|>0 \qquad (3.4)$$

полином (3.3) имеет br корней с положительной мнимой частью (их мы обозначим через $\tau_l^+(x_0,t_0,\zeta,p)$) и br - с отрицательной.

Пусть $$L^+(x_0,t_0,\zeta,p,\tau)=\prod_{l=1}^{br}\left[\tau-\tau_l^+(x_0,t_0,\zeta,p)\right] \qquad (3.5)$$

Будем предполагать, что матрица $\mathscr{B}_0$ удовлетворяет так называемому «условию дополнительности»:

Условие $P(\mathscr{B})$: для любой точки $(x_0,t_0)\varepsilon S_T$ строки матрицы:

$$\hat{\mathscr{B}}^1(x_0,t_0,i(\zeta+\tau\nu),p)=\hat{\mathscr{B}}_0(x_0,t_0,i(\zeta+\tau\nu),p)\,\hat{\mathscr{L}}_0(x_0,t_0,i(\zeta+\tau\nu),p) \qquad (3.6)$$

линейно независимы по модулю полинома L^+ как полиномы по τ, если вектор ζ и p удовлетворяют условиям (3.4) при некотором $\delta_1\in(0,\delta)$, где δ число из (2.2).

Линейная независимость строк матрицы $\mathcal{B}^1(\hat{x}_0,t_0,i(\zeta+\tau\nu),p)$ по модулю полинома L^+ означает, что элементы $\mathcal{B}^1(x_0,t_0,i(\zeta+\tau\nu),p)$ этой матрицы при всех $\mu = 1,\dots, m$ удовлетворяют равенству:

$$\sum_{q=1}^{br} d_q \hat{B}^1_{q\mu}(x_0,t_0,i(\zeta+\tau\nu),p) = p_\mu(\tau)L^+(x_0,t_0,\zeta,p,\tau) \qquad (3.7)$$

с некоторыми полиномами $p_\mu(\tau)$ тогда и только тогда, когда все $d_q = 0$.

Таким образом, матрица $\mathcal{B}$ в граничном условии (3.1) должна иметь $r^+ = br$ строк, т.е. $N = br$ в каждой точке x_0 границы S матрица $\mathcal{B}$ имеет размерность $(br) \times m$.

Перейдем теперь к вопросу о задании начальных условий. Для систем, параболических по Петровскому, начальные условия задают следующим образом: если наивысший порядок дифференцирования по t функции u^μ равен r_μ, то при $t = 0$ задаются все производные этой функции по t более низкого порядка:

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}u^\mu(x,t)\right|_{t=0} = \varphi^\mu_k(x), x\in\Omega (k=0,1\dots,r_\mu-1, \mu=1,\dots,m) \qquad (3.8)$$

Запишем начальные условия (3.8) в виде:

$$\mathbb{C}\left(x,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(x,t)\Big|_{t=0} = \vec{\varphi}(x) \qquad (3.9)$$

где $\vec{\varphi}(x)$ - вектор-функция размерности $r=\sum_{\mu=1}^m r_\mu$;

$\mathcal{C}$ - матричный дифференциальный оператор с элементами $C_{a\mu}(a=1,\dots,r;\ \mu = 1,\dots,m)$, которые, согласно (3.8) определяются соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &C_{r_0+r_1+\beta,\mu}(x,i\xi\lambda,p\lambda^{2b}) = (p\lambda^{2b})^\beta \\ &C_{r_0+r_1+\dots+r_{\mu-1}+\beta,\mu}(x,i\xi\lambda,p\lambda^{2b}) = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(\beta=0,1,\dots,r_\mu-1; \\ &\mu,\mu'=1,\dots,m,\mu\neq\mu'; r_0=0) \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Определим главную часть матрицы $\mathcal{C}$ точно так же, как для матрицы $\mathcal{B}$. Пусть $\gamma_{a\mu}$ - степень полинома $C_{a\mu}(x,t,i\xi\lambda,p\lambda^{2b})$ относительно λ и $\gamma_{a\mu} = 0$ при $C_{a\mu} = 0$, а $\rho_\alpha = \max_\mu(\gamma_{a\mu}-t_\mu)$. Так как $\gamma_{a\mu} \le t_\mu - 2b$, то $\rho_\alpha \le -2b$.

Сумму $C^0_{a\mu}$ всех членов полинома $C_{a\mu}$, удовлетворяющих условию однородности:

$$C^0_{a\mu}(x,t,i\xi,p\lambda^{2b}) = \lambda^{\rho_a+t_\mu}C^0_{a\mu}(x,t,i\xi,p) \qquad (3.11)$$

называют главной частью полинома $C_{a\mu}$, а матрицу $\mathcal{C}_0$ с элементами $C^0_{a\mu}$ - главной частью матрицы $\mathcal{C}$.

Для начальных условий (3.8), полагая $t_\mu = 0(\mu = 1,\dots,m)$, получим $\rho_\alpha = 2b\beta$ для всех $a = r_0 + r_1 +\dots+r_{\mu-1} + \beta$, $\mu'(\beta = 0,1,\dots,r_{\mu-1};\ \mu,\mu' = 1,\dots,m;\ r_0 = 0)$.

Выясним, какому условию должна удовлетворять матрица $\mathcal{C}$, чтобы можно было из системы линейных параболических уравнений:

$$\mathcal{L}_0\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(x,t) = \vec{f}(x,t) \qquad (x,t)\in Q_T \qquad (3.12)$$

и начального условия (3.9) только с помощью операций дифференцирования и решения линейных алгебраических систем однозначно определить значения производных из (3.9). При этом потребуем, чтобы искомое условие одинаково формулировалось для всех параболических по Петровскому систем (3.12) и чтобы в него входили только главные части $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{C}_0$ матриц $\mathcal{L}$ и $\mathcal{C}$. Следовательно, такими же желаемыми свойствами должна обладать система:

$$\mathcal{L}_0\left(x,0,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(x,t) = \vec{f}(x,t) \qquad (3.13)$$

и начальные условия:

$$\mathcal{C}\left(x,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(x,t)\Big|_{t=0} = \vec{\varphi}(x) \qquad (3.14)$$

Если в равенства (3.13) и (3.14) подставлять всевозможные вектор функции $\vec{u}(t)$, не зависящие от x, то они перейдут в

$$\mathcal{L}_0\left(x,0,0,\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(t) = \vec{f}(x,t) \qquad (3.15)$$

$$\mathcal{C}_0\left(x,0,\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(t)\Big|_{t=0} = \vec{\varphi}(x) \qquad (3.16)$$

Для того чтобы можно было однозначно определить из этих равенств $\frac{d^k u^\mu(t)}{\partial t^k}$ $(k\ge 0)$ необходимо, чтобы (3.15) - (3.16) составляли задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.15), однозначно разрешимую при любых $\vec{f}$ и $\vec{\varphi}$ и любом фиксированном $x\in\Omega$.

Имеем:

$$\det\mathcal{L}_0(x,0,0,p) = L(x,0,0,p) = \gamma(x)\cdot p^r \qquad (3.17)$$

причем в силу условия параболичности системы (3.12) (по определению 2) $\gamma(x)\not\equiv 0$. Здесь r - степень полинома $L(x,t,i\xi,p)$ по p.

Для вывода алгебраического условия, являющегося критерием однозначной разрешимости задачи (3.15), (3.16) при любых $\vec{f}$ и $\vec{\varphi}$, достаточно рассмотреть эту задачу при $\vec{f} = 0$. В [6] доказано, что для того, чтобы начальные условия (3.9) обладали упомянутыми выше желаемыми свойствами, необходимо, чтобы выполнялось следующее условие:

Условие $P(C)$: строки матрицы:

$$D(x,p) = \mathcal{C}_0(x,0,p)\ \mathcal{L}_0(x,0,0,p) \qquad (3.18)$$

линейно независимы по модулю полинома:

$$p^r = \frac{1}{\gamma(x)}L(x,0,0,p) \qquad (3.19)$$

при любом $x\in\Omega$.

Условие (3.18) (называемое условием дополнительности для матрицы $\mathcal{C}$) является также и достаточным для наличия у матрицы $\mathcal{C}$ желаемых свойств [10].

Таким образом, рассматриваемая нами начально-краевая задача для параболической системы сформулируется в следующем виде: найти вектор: $\vec{u}(x,t) = (u^1(x,t),\dots, u^m(x,t))$, для которого:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(x,t) = \vec{f}(x,t), && (x,t)\in Q_T \\ &\mathcal{B}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(x,t)\Big|_{S_T} = \vec{\Phi}(t), && t\in[0,T] \\ &\mathcal{C}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{u}(x,t)\Big|_{t=0} = \vec{\varphi}(x), && x\in\Omega \end{aligned} \qquad (3.20)$$

где $\mathcal{L}$ - матричный дифференциальный оператор размерности $m\times m$, параболический в смысле определения 2; $\vec{f}(x,t)$, $\vec{\Phi}(t)$ и $\vec{\varphi}(x)$ - вектор-функции размерности m, brm, br и r соответственно;

$\mathscr{B}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ и $\mathscr{C}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ - матричные дифференциальные операторы размерностей $(br)\times m$ и $(r\times m)$, удовлетворяющие условиям дополнительности $P(\mathscr{B})$ и $P(\mathscr{C})$.

Алгебраические условия $P(\mathscr{B})$ и $P(\mathscr{C})$ являются достаточными для разрешимости задачи (3.20).

Покажем, что граничные условия (1.13)-(1.14) задачи нестационарной фильтрации из раздела 1, можно записать в виде (3.1). Обозначим $\vec{u}(\tilde{x},t) = (u^1(\tilde{x},t), u^2(\tilde{x},t))$, где $u^\mu(\tilde{x},t) = u^\mu(x,y,t) = p_\mu(x,y,t)$ $(\mu=1,2)$. При условии существования частных производных функций $p_i(x,y,t)$ $(i = 1,2)$ по x и y граничное условие (1.14) записывается в виде (1.15).

Условие (1.15) имеет вид (3.1) с правой частью $\vec{\Phi}(x,t) = (0,q(t))^T$ и матрицей

$$\mathscr{B}\left(x,t,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)= \tag{3.21}$$
$$=\left(\begin{matrix} -1 & 1\\ r_c\sigma_1\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial p_1}{\partial y}\sin\varphi\right)d\varphi & r_c\sigma_2\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial p_2}{\partial y}\sin\varphi\right)d\varphi\end{matrix}\right)$$

Так как $\int\limits_0^{2\pi}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi=0$, то

$$\hat{\mathscr{B}}_0\left(x_0,t_0,i,(\zeta+\tau\nu),p\right)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Принимая во внимание, что

$$\mathscr{L}_0\left(x_0,t_0,i,(\zeta+\tau\nu),p\right)=\begin{pmatrix} p+2\frac{\eta}{\varepsilon_1}|\zeta+\tau\nu|^2 & 0\\ 0 & p+2\eta\varepsilon_2|\zeta+\tau\nu|^2\end{pmatrix}$$

для матрицы (3.6) получим следующее выражение:

$$\hat{\mathscr{B}}^1\left(\tilde{x}_0,t_0,i,(\zeta+\tau\nu),p\right)=\begin{pmatrix} -\left(p+2\frac{\eta}{\varepsilon_1}|\zeta+\tau\nu|^2\right) & p+2\eta\varepsilon_2|\zeta+\tau\nu|\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{3.22}$$

Рассмотрим полином:

$$\hat{L}_0\left(x_0,t_0,i(\zeta+\tau\nu),p\right)\equiv\det\mathscr{L}_0\left(x_0,t_0,i(\zeta+\tau\nu,p)\right)=$$
$$=\left(p+2\frac{\eta}{\varepsilon_1}|\zeta+\tau\nu|^2\right)\left(p+2\eta\varepsilon_2|\zeta+\tau\nu|^2\right) \tag{3.23}$$

как функцию от τ на всей комплексной плоскости. Полином (3.23) удовлетворяет неравенству (2.2) с b = 1 (см.2.12). Тогда при любом вещественном ζ (при n = 2 $\zeta = \zeta_1$ - скалярный параметр) и любом комплексном p, удовлетворяющем условиям:

$$Re\,p \geq -\delta|\zeta|^2 \quad (0 < \delta_1 < \delta),\ |p| + |\zeta| > 0, \tag{3.24}$$

где δ - любое положительное число, на основании теоремы 7.9.1 [6], полином (3.23), как функция от комплексной переменной τ, имеет 2 корня с положительной мнимой частью (их мы обозначим через $\tau^+_1(x_0,t_0,\zeta,p)$ и 2 корня - с отрицательной.

Пусть
$$L^+\left(\tilde{x}_0,t_0,\varsigma,p,\tau\right)=\prod_{l=1}^{2}\left[\tau-\tau_l^+\left(\tilde{x}_0,t_0,\varsigma,p\right)\right] \tag{3.25}$$

Покажем, что матрица $\hat{\mathscr{B}}^1\left(\tilde{x}_0,t_0,i(\zeta+\tau\nu),p\right)$ из (3.22) удовлетворяет условию дополнительности (3.6). При $\mu = 1$ равенство (3.7) запишется так:

$$d_1\left(p+2\frac{\eta}{\varepsilon_1}|\zeta+\tau\nu|^2\right)=p_1(\tau)L^+\left(\tilde{x}_0,t_0,\varsigma,p,\tau\right) \tag{3.26}$$

При любом вещественном ζ и любом комплексном p, удовлетворяющем условиям (3.24), полагая $\delta_1<2\frac{\eta}{\varepsilon_1}$, находим, что:

$$\mathrm{Re}\left(p+2\frac{\eta}{\varepsilon_1}|\zeta+\tau\nu|^2\right)>0 \tag{3.27}$$

Корни τ^+_l полинома (3.25) запишем в виде $\tau^+_l = a_{\tau_l} + i\beta_{\tau_l}$, $\beta_{\tau_l} > 0$ (l = 1,2), $a_{\tau_1} < a_{\tau_2}$. Тогда полином (3.25) примет вид:

$$L^+(x_0,t_0,\zeta,p,\tau) = (\tau - \tau^+_1)(\tau - \tau^+_2) =$$
$$=[(\tau - \tau^+_1)(\tau - \tau^+_2)-\beta_{\tau_1}\beta_{\tau_2}]-i[\beta_{\tau_1}(\tau - a_{\tau_1})+\beta_{\tau_2}(\tau - a_{\tau_2})] \tag{3.28}$$

Не уменьшая общности, будем считать, что $d_1 > 0$. Разберем отдельно 3 случая: 1) $p_1(\tau) > 0$ $\forall\tau\in(-\infty,\infty)$, 2) $p_1(\tau) < 0$ $\forall\tau\in(-\infty,\infty)$, 3) $p_1(a_{\tau_1}) \times p_1(a_{\tau_2}) < 0$.

В случае 1) равенство (3.26) приводит к противоречию при любом $\tau < a_{\tau_1}$, поскольку тогда реальная часть левой части (3.26) положительна, а правой части - отрицательна. К такому же противоречию приходим и в случае 2) при любом $\tau > a_{\tau_1}$, для которого первая скобка в правой части (3.28) положительна. Рассмотрим в случае 3) два подслучая: 3а) $p_1(a_{\tau_1}) > 0$, $p_1(a_{\tau_2}) < 0$ и 3б) $p_1(a_{\tau_1}) < 0$, $p_1(a_{\tau_2}) > 0$. В обоих этих случаях в интервале (a_{τ_1},a_{τ_2}) найдется точка $\tau = \tau_0$, в которой $p_1(\tau_0) = 0$. Обозначим через τ^* ближайшии к a_{τ_1} корень уравнения $p_1(\tau) = 0$.

Очевидно, что в точке $\tau = \tau^*$ $ReL^+ < 0$, так как $a_{\tau_1} < \tau^* < a_{\tau_2}$. В силу непрерывности полинома L^+ знак ReL^+ сохраняется в сколь угодно малой окрестности $(\tau^* - \varepsilon,\ \tau^* + \varepsilon)$ точки τ^*. Тогда в случае 3а) приходим к противоречию при $\tau = \tau^* - \varepsilon$, а в случае 3б) - при $\tau = \tau^* + \varepsilon$. Отсюда следует, что равенство (3.26) с $d_1 \neq 0$ невыполнимо для всех $\tau\in(-\infty,\infty)$. Аналогично рассматривается случай $\mu = 2$, в котором достаточно положить $\delta_1 < 2\eta\varepsilon_2$.

Итак, при условии $\delta<2\eta\cdot\min\left(\frac{1}{\delta_1},\varepsilon_2\right)$ матрица $\hat{\mathscr{B}}^1\left(\tilde{x}_0,t_0,i(\zeta+\tau\nu),p\right)$ удовлетворяет условию дополнительности (3.6).

Начальные условия (1.12) можно представить в виде (3.14) с правыми частями $\varphi^1(x) = p_0$, $\varphi^2(x) = p_0$ и матричным дифференциальным оператором

$$\mathscr{C}\left(\tilde{x},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

совпадающим со своей главной частью

$$\mathscr{C}^0\left(\tilde{x},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

при этом матрица $\mathscr{C}^0\left(\tilde{x},i,p\right)$ имеет элементы $C^0_{11} = C^0_{22} = 1$, $C^0_{12} = C^0_{21} = 1$.

Матрицы $\mathscr{L}_0(x,0,0,p)$ и $\mathscr{C}_0(x,0,,p)$ в данном случае имеют вид:

$$\mathscr{L}_0\left(\tilde{x},0,0,p\right)=\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & p\end{pmatrix}$$

Следовательно:

$$D(\tilde{x},p)=\mathscr{C}_0(\tilde{x},0,p)\cdot\mathscr{L}_0(\tilde{x},0,0,p)=\begin{pmatrix}p&0\\0&p\end{pmatrix}$$

$$\det\mathscr{L}_0(\tilde{x},0,0,p)=L(\tilde{x},0,0,p)=\gamma(\tilde{x})\cdot p^r$$

где $\gamma(x)\cong 1$, $r=2$.

Нетрудно видеть, что строки матрицы $D(\tilde{x},p)$ линейно независимы по модулю полинома $L(\tilde{x},0,0,p)=p^2$, поскольку равенство:

$$d\cdot p=\psi(p)\cdot p^2 \qquad (3.29)$$

с константой $d\neq 0$ и многочленом $\psi(p)$ не представляется возможным.

Таким образом, для матрицы $\mathscr{C}\left(\tilde{x},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ выполняется условие дополнительности ***P(C)***.

Более общий (по сравнению с определением 2) класс параболических систем введен в работе [10].

Определение 3 [10]. Оператор $\mathscr{L}$ называется параболическим, если:

1. оператор $L=\det\mathscr{L}$ является параболическим в смысле определения 1;

2. существуют такие целые числа s_k и t_k $(k=1,\dots,m)$, что степень полинома $L_{kj}(x,t,i\xi\lambda,p\lambda^{2b})$ $(k,j=1,\dots,m)$ не превосходит s_k+t_j (если $s_k+t_j<0$, то $L_{kj}=0$) и, кроме того:

$$\sum_{k=1}^{m}(s_k+t_k)=2br$$

где r - степень полинома $L(x,t,i\xi,p)$ по переменной p.

Системы, параболические по Петровскому - это такие параболические системы, для которых $s_1=\dots=s_m=0$, $t_j=2br_j$ $(j=1,\dots,m)$.

В [10] доказана теорема об однозначной разрешимости в классе гельдеровских функций начально-краевой задачи (3.20) для матричного дифференциального оператора $\mathscr{L}$, параболического в смысле определения 3. Для систем параболических по Петровскому, эта теорема сформируется следующим образом.

Теорема. Пусть коэффициенты операторов L_{kj} $(k,j=1,\dots,m)$ принадлежат классу $H^{l,\frac{l}{2b}}(\bar{Q}_T)$, операторов B_{qm} $(q=1,\dots,br;\ \mu=1,\dots,m)$ - классу $H^{l-\sigma_q,\frac{1}{2b}(l-\sigma_q)}(\bar{S}_T)$, операторов C_{aj} $(a=1,\dots,r;\ j=1,\dots,m)$ - классам $H^{l-p_a}(\bar{\Omega})$ и $S\in H^{l+t_{\max}}$ $t_{\max}=\max\limits_{\mu=1,\dots,m}t_\mu$, $t_\mu=2br_\mu$, $r=\sum_{\mu=1}^{m}r_\mu$, где $l>0$ - нецелое число.

Тогда при выполнении условий дополнительности ***P(ℬ)*** и ***P(𝒞)*** задача (3.20) имеет единственное решение в классе вектор-функций, у которых:

$$u^\mu(x,t)\in H^{l+t_\mu,\frac{1}{2b}(l+t_\mu)}(\bar{Q}_T)$$

при любых $f^\mu(x,t)\in H^{l,\frac{l}{2b}}(Q_T)$ $(\mu=1,\dots,m)$,

$$\Phi^q(t)\in H^{\frac{1}{2b}(l-\sigma_q)}[0,T],\ (q=1,\dots,br),$$

$$\varphi^a(x)\in H^{l-\rho_a}(\bar{\Omega}),\ (a=1,\dots,r),$$

удовлетворяющих условиям согласования, необходимым для существования решения из указанного класса. Решение подчиняется неравенству

$$\sum_{\mu=1}^{m}\left\|u^\mu(x,t)\right\|_{H^{l+t_\mu,\frac{l+t_\mu}{2b}}(\bar{Q}_T)}\le C\left(\sum_{\mu=1}^{m}\left\|f^\mu(x,t)\right\|_{H^{l,\frac{l}{2b}}(Q_T)}+\sum_{q=1}^{br}\left\|\Phi^q(t)\right\|_{H^{\frac{1}{2b}(l-\sigma_q)}[o,T]}+\sum_{a=1}^{r}\left\|\varphi^\mu(x)\right\|_{H^{l-\rho_a}(\bar{\Omega})}\right) \qquad (3.30)$$

Пространства гельдеровских функций $H^l(\Omega)$, $H^l[0,T]$, $H^{l,\frac{l}{2b}}(\bar{Q}_T)$ и их нормы определены в [6]. Здесь l - нецелое положительное число, одинокий верхний индекс l характеризует гельдеровость по переменной $x\in\Omega$ или $x\in[0,T]$, в двойном верхнем индексе $\left(l,\frac{l}{2b}\right)$ индекс l характеризует гельдеровость по пространственной переменной x, а индекс $\frac{l}{2b}$ - гельдеровость по t.

Соотношение (3.30) между гладкостью известных функций и решения является точным, а наложенные условиями теоремы ограничения на коэффициенты уравнений необходимы для того, чтобы каждый член любого уравнения системы принадлежал тому же классу, что и свободный член (то же самое верно для краевых и начальных условий). Определение поверхности S, принадлежащей классу H^l, $l>1$, см. в [6].

Как было показано выше, для задачи нестационарной фильтрации (1.11)-(1.14) выполняются условия дополнительности ***P(ℬ)*** и ***P(𝒞)***. Кроме того, в данном случае коэффициенты операторов $L_{k\mu}(k,\mu=1,2)$, операторов $B_{q\mu}(q,\mu=1,2)$ и операторов $C_{aj}(a,j=1,2)$ постоянные величины и поверхность S дважды дифференцируема. Принимая во внимание, что $t_\mu=2$ $(\mu=1,2)$, $\sigma_1=-2$, $\sigma_2=-1$, $\rho_1=\rho_2=-2$, для существования и единственности классического решения (КР) задачи (1.11)-(1.14) (т.е. решения, для которого непрерывны все производные, входящие в формулировку задачи), на основании вышеприведенной теоремы достаточнопредположить, что

$$q(t)\in H^{1+\frac{l}{2}}(Q_T)$$

где l - любое положительное число. Тогда решение $\vec{u}(x,t)=\{u^1(x,t),u^2(x,t)\}$ задачи (1.11)-(1.14), где $u^\mu(x,t)=p_\mu(x,y,t)$ $(\mu=1,2)$ будет принадлежать классу $H^{2+l,1+\frac{l}{2b}}(\bar{Q}_T)$, т.е. является классическим решением.

Литература

1. *Г.И.Баренблатт, Ю.П.Желтов, И.Н.Кочина.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. //Прикладная математика и механика, 1960, т.24, вып.5, с.852-864.

G.I.Barenblatt, Yu.P.Zheltov, I.N.Kochina. Ob osnovnyh predstavleniyah teorii filtra¬tsii odnorodnyh jidkostey v treshchinovatyh porodah //Prikladnaya matematika i mehanika (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). -1960. -T.24. -Vip.5. -S.852-864

2. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). Отв.ред. П.Я.Кочина. -М.: Наука, 1969. - 541с.

Razvitie issledovaniy po teorii filtratsii v SSSR (1917-1967) /Otv.red. P.Ya.Kochina. M.: Nauka, 1969

3. *Ю.П.Желтов.* Механика нефтегазоносного пласта. -М.: Недра, 1975. -216с.

P. Zheltov. Mechanics of oil and gas bearing strata. M.: Nedra, 1975

4. *Г.И.Баренблатт.* О некоторых краевых задачах для уравнений фильтрации жидкости в трещиноватых породах. // Прикладная математика и механика, 1963, т.XXVII, вып.2.

G.I.Barenblatt. O nekotoryh krayevih zadachah dlya uravneniy filtratsii jidkosti v tre¬shinovatyh porodah //Prikladnaya matematika i mehanika (Journal of Applied Mathematics and Mechanics). -1963. -T.XXVII. -Vip.2

5. *В.Н.Николаевский, К.С.Басниев, А.Т.Горбунов, Г.А.Зотов.* Механика насыщенных пористых сред. -М.: Недра, 1970. -339с.

V.N.Nikolayevskiy, K.S.Basniyev, A.T.Gorbunov, G.A.Zotov. Mechanics of saturated porous media. M.: Nedra, 1970

6. *О.А.Ладыженская, В.А.Солонников, Н.Н.Уральцева.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. -М.: Наука, 1967. -С.736.

O.A.Ladyzhenskaya, V.A.Solonnikov, N.N.Uraltseva. Linear and Quasilinear Parabolic Equations. M.: Nedra, 1967

7. *А.Бан, А.Ф.Богомолова, В.А.Максимов и др.* Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. -М.: Гостоптехиздат, 1962. -С.275.

A.Ban, A.F.Bogomolova, V.A.Maksimov i dr. Vliyanie svoystv gornih porod na dvijenie v nih jidkosti. M.: Gostoptehizdat, 1962.

8. *К.С.Басниев, Н.М.Дмитриев, Р.Д.Каневская, В.М.Максимов.* Подземная гидромеханика. -М. -Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. -С.496.

K.S.Basniev, N.M.Dmitriev, R.D.Kanevskaya, V.M.Maksimov. Underground hydromechanics. M.-Izhevsk: Institute of Computer Research, 2005

9. *О.А.Ладыженская., Н.Н.Уральцева.* Краевые задачи для линейных и квазилинейных уравнений и систем параболического типа. III. //Известия АН СССР. Серия математ. 1963. Т.27. С.161-240

O.A.Ladyzhenskaya. N.N.Uraltseva. Boundary-value problems for linear and quasi-linear equations and systems of parabolic type // Izvestiya AN SSSR. Seriya Matematicheskaya. -1963. –Vol.27. -P161–240

10. *В.А.Солонников.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. Труды Математ.института АН СССР, 1965, т.83.

V.A.Solonnikov. On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form //Trudy Matematicheskogo Instituta AN SSSR. -1965. –Vol.83

11. *Я.Б.Лопатинский.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям //Укр.матем.журн., 1953, т.5, №2, с.123-151.

Ya.B.Lopatinskiy. Ob odnom sposobe privedeniya granichnyh zadach dlya sistemy differentsialnyh uravneniy ellipticheskogo tipa k regulyarnym integralnym uravneniyam //Ukrainskiy matematicheskiy jurnal. -1953. -T.5. -№2. -S.123-151

Solvability at Helder's functions of initial – boundary problems of nonstationary liquid filtration in crack-porosity medium of circular form

O.A.Dyshin
("OilGasScientificResearchProject" Institute)

Abstract

In work it be proved that the partial differential equations which describe nonstationary filtration of homogeneous liquid in crack-porosity medium are parabolic by Petrovsky system of equations. The initial-boundary problem of nonstationary liquid filtration in crack-porosity medium with circular form is considered at boundary conditions on external border of reservoir in view of present of two mediums. The conditions of existence and uniqueness for problem' solution have determined.

Çatlı – məsaməli həlqəvi layda mayenin qeyri-stasionar süzülmə məsələsinin gelder funksiyalarında həlli

O.A.Dışin
("Neftqazelmitədqiqatlayihə" İnstitutu)

Xülasə

Göstərilir ki, çatlı-məsaməli mühitdə bircins mayenin qeyri-stasionar süzülməsini təsvir edən xüsusi törəmələrdə, differensial barabərliklər sistemi Petrovskinin bərabərlik sisteminə görə parabolikdir. İki mühitin olmasını nəzərə almaqla, verilmiş sərhəd olmasını nəzərə almaqla, verilmiş sərhəd şərtlərinə görə, layın səthi ilə sərhəddə və quyu divarlarında həlqəvi formalı çatlı-məsaməli layda qeyri-stasionar süzülmənin ilkin-əlaqəli məsələsinə baxılmışdır. Hazırki məsələnin mövcudluğunun və vahidliyinin həlli şərtləri gelder funksiyaları sinfində müəyyən edilmişdir.