AZƏRBAYCAN ELMLƏR AKADEMİYASI

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA İNSTİTUTU

A. X. MİRZƏCANZADƏ, F. Q. MAQSUDOV

RİYAZİ MOZAİKA

Bakı – Elm – 1992

Azərbaycan Elmlər Akademiyası
Elmi-Nəşriyyat Şurasının
qərarı ilə çap olunur

Redaktoru **A. M. Hüseynbəyov**

Mirzəcanzadə A. X., Maqsudov F. Q. Riyazi mozaika. – Bakı: Elm, 1992. – 176 s.

Əsərdə nəzəri və tətbiqi mexanikanın, riyaziyyatın müxtəlif məsələləri, həmçinin praktiki vəzifələri nəzərdən keçirilir. İlk baxışda sanki bir-biri ilə heç cür bağlı olmayan müxtəlif fiziki proseslər və hadisələr arasındakı daxili əlaqə göstərilir.

M $\frac{1602010000-290}{655\ (07)-92}$ $31-92$

© „Elm”, 1992

Nəzəri və tətbiqi riyaziyyatın populyar şərhinə aid çoxlu sayda ədəbiyyat mövcuddur. Bunlardan bəziləri müəlliflərin öz vətənlərində və ya onun sərhədlərindən kənarda dəfələrlə nəşr olunmuşdur. Təbiidir ki, belə bir vəziyyətdə populyar kitabça yazmağı qərara almaq olduqca məsuliyyət tələb edir.

Müəlliflərin fikrincə, onlarin uzun illər ərzində müxtəlif populyar və xüsusi kitablar oxuyarkən yadlarında qaldıqları misallar nəinki biliklərin cəmlənməsinə, hətta yaradıcılıq qabiliyyətinin inkişafına, xüsusi halda mühəndis səviyyəsində biliklərin dərk olunmasına təsir edir.

Kitabçadakı qaz-neft mədən işinə aid olan misallar profilcə müəlliflərdən birinin elmi işlərinə yaxındır.

Müxtəlif müəlliflər müxtəlif dövrlərdə riyazi üsulların gözəlliyi, incəliyi və parlaqlığı haqqında yazmışlar. A. Y. Xinçinin, V. Heyzenberqin məqalələri bu baxımdandır.

Tətbiqi məsələlər Y. B. Zeldoviçin kitabında mükəmməl şərh edilmiş və ayrı-ayrı məsələlərin şərhi riyazi ciddiliyi cəhətdən tənqidə məruz qalmışdır.

Kitabça əhatə baxımından daha geniş olub, ayrı-ayrı məsələlər isə qarşıya qoyulmuş məqsəddən asılı müxtəlif bilik dərinliyi ilə şərh edilmişdir. Əlbəttə, bu kitabçaya hər bir oxucunun nəyi görmək istədiyi cəhətdən baxılsa, şübhəsiz, çoxlu çatışmazlıqlar ortaya çıxar.

Əsərin adındakı «mozaika»[1] sözü özünə məxsus qoruyucu klapandır. Belə bir misal gətirək:

Bir sənətşünasla söhbət zamanı faciənin gərginliyi və maksimumuna görə V . A. Motsartın «Don Juan»ı ilə P. İ. Çaykovskinin «Qaratoxmaq qadın» və Q. Ə. Qarayevin «İldırımlı yollarla» əsərləri arasında paralel çəkildi. Sənətşünas müəlliflərdən birinə dedi ki, V. A. Motsart və P. İ. Çaykovski

---

[1] Mozaika – fransızca, italyanca cürbəcür qarışıq deməkdir. Xarici sözlər lüğəti. Xarici və milli lüğətlərin dövlət nəşriyyatı (5-ci stereotip nəşriyyatı). M., 1955, s. 477.

arasında oxşarlıq İ. İ. Sollertinski tərəfindən çoxdan ayırd edilmişdir. Müəlliflərdən biri buna cavab verir ki, o doğrudan da, ikinci dəfə Amerika kəşf etmir, yəqin ki, o bunu İ. İ. Sollertinskidə oxuyubdur və bu ideyanı öz şəxsi ideyası kimi bilir, ancaq müəlliflik iddiasında deyildir. İnsanın formalaşması və tərbiyə olunması işində oxunmuş kitabların əhəmiyyəti də məhz bunda öz ifadəsini tapıb. Qeyd olunanlar tam və bütövlüklə kitabçada şərh olunan məsələlərə də aiddir.

Kitabçada yenilik tapmayan oxuculara Şekspir qəhrəmanlarından birinin pessimist qeydini xatırladaq: «Yeniliyin yoxluğu özü də bir yaxşı yenilikdir». Bu o deməkdir ki, şeylər olduğu vəziyyətindən yaxşılığa doğru dəyişiklik gözləmir və sabitliyin saxlanmasını bir xoşbəxtlik, səadət hesab edir. Bir daha qeyd edək ki, kitabça ardıcıl xarakter daşımır və o, «alışdırmaq» məqsədinə nail olsa, müəlliflər tam razı qalarlar.

Əlyazmasının çapa hazırlanmasında böyük kömək göstərdiklərinə görə T. A. Səmədov , A. V. Məmmədov, V. A. Baryudin və X. İ. Nəbiyevaya öz minnətdarlığımızı bildiririk.

Tənqidçilərin riyaziyyatın, xüsusən, qeyri-mütəxəssislər tərəfindən populyar şərhinə münasibətini unutmayaraq, müəllif D'Alamberin sözünü yada salır: «Əgər tənqid haqlı və xeyirxahdırsa, onu minnətdarlıq və hörmətlə qəbul etmək lazımdır. Tənqid haqlı və xeyirxah deyilsə, ondan yan keçmək lazımdır».

Kitabçanın yazılmasına başqa bir sıra səbəb də vardır.

Riyaziyyatın qeyri-adi vəziyyəti yığılmış faktlar ehtiyatı, hətta nəzəri aparatın çevikliyi ilə təyin olunmur; riyaziyyat məlumatlar və müəyyən üsullar yığını, metodologiya və hətta özünə məxsus fəlsəfə ilə bitmir, riyaziyyatın başqa təfəkkür potensialı, başqa imkanları, başqa taleyi vardır; insan təfəkküründə məntiqin təməl daşını qoyaraq onu

formalaşdırmaq və tərbiyələndirmək, insan düşüncəsinə istiqamət vermək və onu nizama salmaq.

Hər şeydən fövqəladə odur ki, riyaziyyat ağılı və məntiqi sadəcə olaraq inkişaf etdirmir, həm də onlara ilkin ahəngdarlıq gətirir. Bu vəzifəni yerinə yetirdikdə isə o, incəsənətlə bərabərləşir. İncəsənət bizi hisslərin, riyaziyyat isə fikirlərin ahəngdarlığı ilə cəlb edir.

Riyazi təfəkkür bədii təfəkkürə nisbətən az uydurma tələb edir.

A. S. Puşkin düz deyir: «Şerdəki kimi həndəsədə də ilham lazımdır».

Müəlliflər ümidvardır ki, oxuculara təqdim edilmiş kitabça qeyd olunmuş istiqamətlərdə faydalı olacaqdır. Fiziki nəzəriyyənin əsaslandığı anlayışların təyin olunması əsasların əsasıdır. Bununla əlaqədar, deyilənləri bir qədər aydınlaşdıran bir lətifə yada düşür. Astronom Venera fazlarını və s. göstərərək, ekskursantlara Kepler qanunlarını izah edir. Ekskursiya iştirakçılarından biri öz təşəkkürünü bildirərək deyir: Siz çox yaxşı izah etdiniz, mən hamısını başa düşdüm, ancaq bir şeyi başa düşmədim ki, siz hardan bildiniz ki, onun adı Veneradır?

– Bunu bilmək olmaz, adlandırmaq olar.
– Uzunluq nədir bilmək olmaz, onu təyin etmək lazımdır. Ancaq fərq vardır:

əgər Venera adlandırmasanız, necə istəyirsiniz adlandırın. Necə istəyirsiniz, ancaq hüdudla. Məsələn, C. Verdinin operasına vurğun olduğunuzdan, qızı Traviata adlandırmaq olmaz, çünki, Traviatanın rus dilinə tərcüməsi əxlaqsız qadın deməkdir.

İngiltərənin kraliçası Uinston Çerçilə hersoqluq titulu təklif etmişdir. Hersoqluğun adına uyğun Çerçill familiyasını dəyişdirib Marlboro etməli olduğundan hersoqluq titulunu rədd edir. Bu, adların verilməsinə necə səliqə ilə, öz familiyasına necə hörmətlə, əcdadların ola biləcək işarələmələrinə necə

diqqətlə yanaşmaq lazım olduğuna misal ola bilər. Məsələn, $\sqrt{25}$, $\sqrt{25}$ yazılarına tez-tez, $\sqrt{25}$ şəklində yazıya isə nadir hallarda rast gələ bilərik, baxmayaraq ki, kök işarəsi latın sözü olan və kök mənasını verən radix sözündən irəli gəldiyindən $\sqrt{25}$ şəklində yazmaq daha düzgün olardı. Yeri gəlmişkən deyək ki, radikulit xəstəliyinin adı da həmin latın sözündən irəli gəlir.

Riyaziyyat, adına görə ümumi, ilk görüşdə isə müxtəlif məna verən xarici sözlər ehtiyatının təkmilləşməsinə kömək edir (məs. 28-ci misala bax).

Bir dəfə müəlliflərdən biri kitab mağazasında belə bir söhbət eşidir. Alıcılardan biri A. Mixalkov-Konçalovskinin riyazi mövzuda yazmasından heyrətə gəlir.

Aydındır ki, parabola yunan dilində yaxınlaşma, dilşünaslıqda isə kinayə, anlaşılmaz şey və s. deməkdir. Tez-tez belə bir şeylə qarşılaşmalı oluruq ki, insanlar analitik həndəsədə ellips mənasını bilir, dilçilikdə isə onun mənasını təsəvvür etmirlər. Ellips də yunan sözü olub, buraxma deməkdir, yəni asan nəzərdə tutulan bəzi sözləri mətndə buraxmaq olar. Məsələn, «mən evə gedirəm» əvəzinə «mən evə» demək olar.

A. S. Puşkinin şerlərində ellipslər mötərizəyə alınıbdır.

«İlk qar. Biz qalxıb o saat atlara (otururuq) və dan yeri söküləndə yorta-yorta səhra boyu (çapırıq) ».

Hiperbola – yunan sözü olub, aşma, keçid, artırma deməkdir. Onun riyaziyyat və linqvistikadakı mənası hamıya yaxşı məlumdur.

Sinus – latın dilində əyilmə, əyrilik deməldir, triqonometriyada və anatomiyada tətbiq olunaraq, o, örtük, boşluq, gərmə mənasında işlədilir. Kosinus isə – ön şəkilçi ilə sinus birlikdə, yəni katetin bitişik bucağa nisbəti. Tangensin tərcüməsi toxunan, sekansın tərcüməsi isə kəsən deməkdir.

İlk baxışda arifmetika və loqarifm sözlərinin heç bir əlaqəsi yoxdur, ancaq daha diqqətlə baxanda loqarifm loqos və arifmas

sözlərindən ibarətdir. Arifmas yunanca ədəd, loqas aiddir deməkdir. Etika – yunan sözü olub, adət, dəb, xasiyyət deməkdir, yəni ədədlərin özünü aparması haqqında elmdir. Major (böyük) və minor (kiçik) kimi fransız sözləri riyaziyyatda, musiqidə, eləcə də, əhvali-ruhiyyənin analizində tətbiq edilir. Mojarlayıcı sıra və ya mojarant – sıranın yuxarıdan, minorlaşdırıcı sıra və ya minorant – aşağıdan qiymətləndirilməsidir. Minor əhvali-ruhiyyə – bədbin, yumşaq, - major əhvali-ruhiyyə isə gümrah, şən əhvali-ruhiyyədir. Musiqidə major – əsas tondan yuxarıda böyük tersiya ilə kiçik tersiyanın birləşməsi vasitəsilə qurulan üçhəmsəda (məsələn, do-mi-sol), minor da əsas tondan yuxarıda, kiçik tersiya ilə böyük tersiyanın birləşməsi ilə qurulan üçhəmsədadır (məsələn, lya-do-mi).

Riyazi üsullar mühəndisdə bir sıra keyfiyyətləri inkişaf etdirir: birinci növbədə bu, anlayış və tərifləri ayırd etməyə aiddir və «belə olmalıdır».

Bir neçə misal göstərək:

1-ci misal. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ hasilinə baxaq. Bəzən nə üçün qüvvət göstəriciləri toplanırlar sualına baxmayaraq ki, tərifə görə a^n (a)-nın n dəfə, a^m isə (a)-nın m dəfə təkrar olunmasıdır, qayda belədir deyə, şagirdlər cavab verirlər. Təbiidir ki, vurmada (a) $(m+n)$ dəfə təkrar olunur.

Konkret və abstrakt təfəkkür haqqında rəmzi xatırlayaq: «Konkret» təfəkkürlü adama sual olunur: 3 vurulsun 5 nəyə bərabərdir? Belə hallarda 3 nəyə və 5 nəyə vurulur sualına cavab ver. Əgər hər biri 3 manatdan 5 kitab alınıbdır kimi izah etsək, 5 kitab neçəyədir sualına tez – 15 manat cavabı verilər.

Bu tipli rəqəmləri ifadə etmək üçün insanlar çox vaxt fikirlərində hətta böyük rəqəmləri də vururlar. Yer kürəsində hətta indi də elə tayfalar (nəsillər) mövcuddur ki, onlarda «3 kitab» və «3 manat» ifadələrindəki konkret ədəd müxtəlif cür səslənir.

Bu tayfanın adamları ədəd anlayışını konkret sayma obyektindən fikrən ayıra bilmirlər. Təbiidir ki, bu tayfalar dəqiq elmlərin təkcə yaranmasında deyil, onun mənimsənilməsində də müvəffəqiyyətlər qazana bilmirlər. Yeri gəlmişkən, qeyd edək ki, müstəsnasız qayda yoxdur. Belə ki, yapon dilində kitab – xon, manat – ruburu, alma – rinqo-dur. Yapon dilində üç kitab – sapsasu no xop, üç manat – san-ruburu, üç alma – mitsu no rinqo-dur.

İngiltərə, Fransa, AFR-dəki elmi işçilərin birgə sayından çox elmi işçisi olduğundan Yaponiyada 60-cı illərin axırından başlayaraq, elmi kadrların artım sürəti onların mütləq sayına görə kapitalist aləmində ABŞ-dan sonra 2-ci yerə çıxır.

Bu baxımdan məktəblinin aşağıdakı tipli misala münasibəti də maraqlıdır. Ona hovuza müəyyən qədər suyun tökülməsi və eyni zamanda oradan o qədər suyun axması haqqında məsələni həll etmək təklif olunursa, nəyə görə bu iki əməliyyatın eyni vaxtda aparılması zərurəti məktəblini təəccübləndirir.

Bolqar yumorundan da bir misal gətirək: «Plyajda 3 hovuz var idi: biri isti, digəri soyuq su ilə doldurulmuş, üçüncüsü isə boş saxlanılmışdır», – deyə müəllim yeni məsələni oxuyur. Səbirsiz uşaqlardan biri plyajda susuz hovuzun kimə lazım olduğunu soruşur. Zəkalı digəri – «boş hovuz üzməyi bacarmayanlar üçündür», – deyə cavab verir.

Məsələ nümunəsi:

x – tökülür, y – axır. Nə qədər töküldüyü və nə qədər axması qeyri-məlumdur. Çənin həcmi a – məlumdur. Tökülənlə axanın birgə miqdarını tapmaq, təyin etmək zəruridir.

Tökülənin miqdarını xм^3, axanın miqdarını isə yм^3-la işarə edək.

İki dəyişənli birdərəcəli iki tənliklər sistemini quraq:

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$x = \frac{a+b}{2}; \quad y = \frac{b-a}{2}$$

$$x = 4м^3; \quad y \quad 1м^2$$

Müəmmanı nəzərə alaraq, m və n-nə konkret qiymətlər, məsələn, $m = 3$, $n = 2$ verək. Onda $a^3 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$ alırıq.

Başqa bir misala baxaq:

$$\sin x = \frac{a + b}{2\sqrt{ab}}$$

tənliyini həll etmək lazımdır.

Konkret təfəkkürlü adamlar, birinci növbədə, a və b hansı ədədi qiymətlər alır, sualını verirlər.

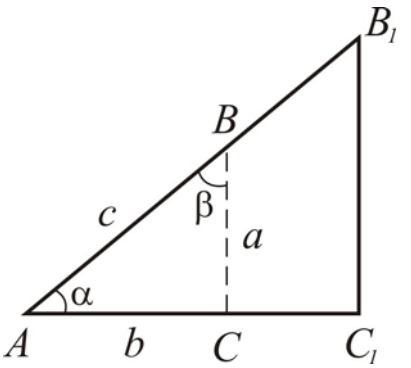
$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$ (iki a və b kəmiyyətinin orta ədədi qiyməti onların orta həndəsi qiymətindən böyük və ya ona bərabərdir) bərabərsizliyini tətbiq etsək, asanlıqla həlli tapmaq olar. Onda

$$\frac{a + b}{2\sqrt{ab}} \geq 1 \quad \text{və} \quad \sin x \geq 1$$

$\sin x$ vahiddən böyük olmadığından $\sin x = 1$ alırıq. Beləliklə,

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

2-ci misal. Nə üçün triqonometriyada altı triqonometrik funksiya ifadə olunur? Bunu düzbucaqlı üçbucaq misalında izah edək (1-ci şəkil).



1-ci şəkil.

$$AB = C,\ BC = a,\ AC = b,$$
$$AB_1 = c_1,\ B_1C = a_1,\ AC_1 = b_1.$$

ABC üçbucağını qurmaq üçün a və b katetlərinin, ya da bir katet və ona bitişik bucağı vermək zəruridir, misal üçün b katetini və α bucağını; b katetini və c hipotenusunu və ona bitişik α bucağını.

Birinci halda hipotenuz Pifaqor teoreminə görə təyin olunur:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

β bucağını təyin etmək üçün qurma üsulundan istifadə etmək lazımdır, həndəsi olaraq bu bucaq ancaq ölçmə əsasında təyin oluna bilər.

İkinci halda c və a məchullarından biri ölçmə yolu ilə, digəri isə Pifaqor teoreminə görə təyin olunur.

«Ölçməni analitik hesablama ilə əvəz etmək olarmı?» sualı meydana çıxır.

Aşağıdakı qaydadan istifadə etmək olar:

İki ABC və $A_1B_1C_1$ üçbucaqları oxşardırlarsa, onda katetlər üzünluqlarına görə fərqlənsələr də, eyni bir α bucağında altı münasibət

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1};\quad \frac{b}{c}=\frac{b_1}{c_1};\quad \frac{a}{c}=\frac{a_1}{c_1}$$

və üç tərs münasibət

$$\frac{b}{a}=\frac{b_1}{a_1};\quad \frac{c}{b}=\frac{c_1}{b_1};\quad \frac{c}{a}=\frac{c_1}{a_1}$$

sabit qalır.

Hər bir bucaq üçün olan münasibətlər məlumdursa, (bir dəfə hesablamalı və onlara görə cədvəl qurmalı) artıq ölçmələrə keçmək lazım deyil.

Beləliklə, triqonometrik funksiyalar daxil edilməsi naməlum katet və bucaqların ölçmədən analitik hesablanılmasına keçməyə imkan verir.

3-cü misal. Sabit əmsallı, ikitərtibli bircins diferensial tənliyin həllinə baxaq:

$$y''+\ a_1y'+\ a_2y\ =\ 0$$

Xüsusi həlli $y = ce^{\alpha t}$ şəklində axtaraq. Bu funksiyanın tənliyin həlli olmasını asanlıqla yoxlamaq olar:

$$\alpha^2 ce^{\alpha t} + a_1 ce^{\alpha t} + a_2 ce^{\alpha t} = \alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0.$$

ancaq elə təəssürat yaranır ki, bu həlli almaq üçün ya xüsusi işıqlanma, ya xüsusi dərrakə, ya da müvəffəqiyyət, xoşbəxtlik və s. lazımdır. Eyni zamanda göstərilən həlli ardıcıl əvəzetmə yolu ilə də almaq olar.

$$y'=\ \upsilon$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\ =\ \frac{d\upsilon}{dt}\ ,$$

$$\frac{d\upsilon}{dt}\ =\ \frac{d\upsilon}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}\ =\ \frac{d\upsilon}{dy}\cdot\ \upsilon.$$

Beləliklə, ikitərtibli tənlik birtərtibli qeyri-xətti tənliyə gətirilir, burada υ – funksiya, y – isə arqumentdir, yəni

$$\frac{d\upsilon}{dy}\upsilon + a_1\upsilon + a_2 y = 0$$

Bircins olmayan tənliyin $\upsilon = a_2 y$ həllini $\frac{d\upsilon}{dy}\upsilon + a_1\upsilon + a_2 y = 0$ tənliyində yerinə yazsaq, $a_3^2 y + a_1 a_3 y + a_2 y = 0$ və ya $a_3^2 + a_1 a_3 + a_3 = 0$ alarıq.

$\boldsymbol{\upsilon}$-ni təyin edək.

$$\frac{dy}{dt} = a_3 y; \quad \frac{dy}{y} = a_3 dt; \quad \ln y = a_3 t + \ln c; \quad y = c \cdot e^{a_3 t}$$

Biz özümüzdə nə qədər çox «nə üçün?» sualına cavab vermək qabiliyyətini saxlaya bilsək, bu bizim yaradıcılıq qabiliyyətimizi saxlamağımıza bir o qədər çox kömək edər və çox güman ki, Klark qanununa görə yaradıcılıqdan erudisiyaya keçid müddətini də bir qədər uzadar (Klark qanununa görə yaş artdıqca yaradıcılıq qabiliyyəti azalır, erudisiya isə artır, yəni böyük İran şairi Sədinin təbirincə desək: yarım əsr təcrübə və müdriklik toplamaq lazımdır ki, sonrakı yarım əsrdə yaradasan).

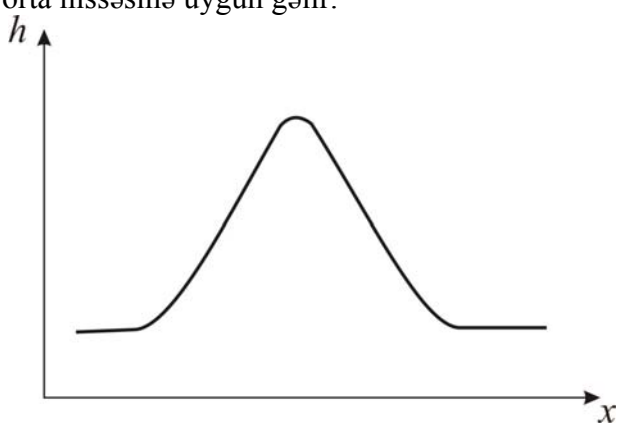
Klark qanununa müraciət edərkən hər kəsə məlum olan yaradıcılığın və erudisiyanın əlaqəsi haqqında, onun böyük şərtiliyini və keyfiyyətli ziddiyyətini başa düşmək lazımdır. Belə hallarda paradokslar da baş verir. Məsələn, məşhur bəstəkar və dirijor Rixard Ştraus yazırdı ki, insan dirijorluq sənətinin incəliklərini ən tezi 70 ilə öyrənə bilər, halbuki kişilərin orta hesabla ömrü 64 ildir. Onda belə nəticə çıxartmaq olar ki, kişilər ömürlərinin sonuna kimi dirijorluq sənətinə tam yiyələnə bilməzlər.

İndi isə əsaslı ortanın tərifini müzakirə edək.

4-cü misal. Fərz edək ki, bir faktora çoxlu sayda ayrı-ayrı səbəblər təsir edirlər (məsələn, insan boyunun artmasına onun irsi əlamətləri, yeməyi, yaşadığı coğrafi mühit və s. təsir edir. Həmçinin şagirdlərin aldıqları qiymətlərə də çoxlu faktlar təsir edir: dərs prosesinin keyfiyyəti, imtahan vaxtı yaranmış mənəvi atmosfer və s.).

İnsanın orta boyunu, orta davamiyyətini, orta qidalanmasını necə təyin etmək məsələsi meydana çıxır. Bu məsələni «Konus» prinsipi ilə ardıcıl həll edək, daha dəqiq desək, prosesi tam əhatə edərək sonrakı pillələrdə alınan nəticələri dərinləşdirək.

Həyati təcrübəmizə yaxın olan hallardan birini seçək. Məsələn: məlumdur ki, ən alçaq və ən hündürboylu insanların sayı adətən az olur, əsasən «orta» boylu insanlara rast gəlinir. Koordinat sistemində ordinat oxunun üzərində verilmiş adamların nisbi sayını, yəni verilmiş uzunboylu adamlar sayının baxılan adamların ümumi sayına (h) nisbətini, absis oxunun üzərində isə adamların boyunu (x) qeyd etsək, onda alınan əyrinin boyu çox gödək və çox hündür boyu olan adamların nisbi sayına (az miqdarda baş verən hadisələrin sayına nisbətən) uyğun gələn iki ucu olacaqdır. Əsas kütlə isə əyrinin orta hissəsinə uyğun gəlir.



2-ci şəkil.

2-ci şəkildə belə bir əyri keyfiyyət nöqteyi-nəzərincə verilmişdir. Belə «ikiuclu»
əyrilər yuxarıda göstərilən başqa hallarda da üzə çıxırlar, məsələn, adətən lap pis oxuyan və lap yaxşı oxuyan tələbələrin sayı nisbətən az olur.

İndi də növbəti mərhələyə keçək. Bu mərhələ də bizə alınmış əyrini keyfiyyət baxımından dəqiqləşdirməyə imkan verəcək. Bu məqsədlə zehni bir təcrübə aparaq. Təsəvvür edək ki, iki hissədən ibarət olan bir otaq var və bu iki hissədə 6 nəfərin müxtəlif mövqelərinin sayı 7-dir. Birinci mövqedə variantların sayı birdir (1-ci cədvəl). İkinci mövqedə

1-ci cədvəl

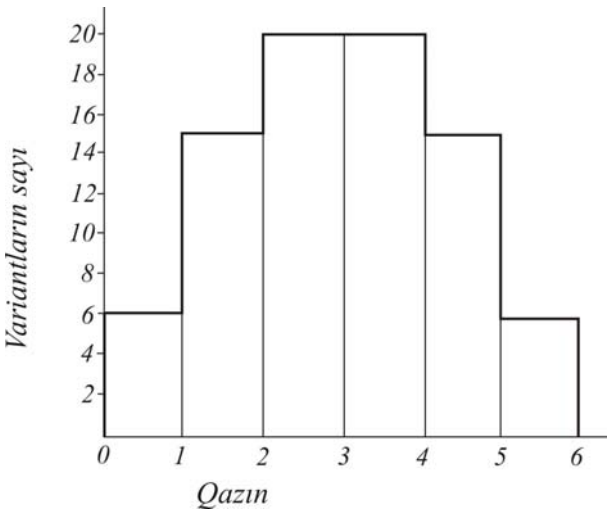
I hissə	II hissə	Variantların sayı
0	6	1
1	5	6
2	4	15
3	3	20
4	2	15
5	1	6
6	0	1

6 adamdan istənilən biri otağın sol hissəsində yerləşdirilə bilər. Üçüncü mövqeni aydınlaşdıraq. Şərti olaraq adamları a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 ilə işarə edək. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 ilə birləşərək 5 variant əmələ gətirir; a_2 isə a_3, a_4, a_5, a_6 ilə birləşərək 4 variant əmələ gətirir; a_3, a_4, a_5, a_6 ilə birləşərək 3 variant əmələ gətirir; a_4, a_5 və a_6 ilə birləşərək 2 variant əmələ gətirir; a_5 isə a_6 ilə birləşərək 1 variant əmələ gətirir. Beləliklə, variantları cəmləyərək 15 variant alırıq.

Variantların sayını kombinizonlar düsturunun köməyi ilə daha asan hesablamaq olar: $c_1^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$

Dördüncü mövqeyə $c_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ variant uyğun gələcək.

Sonrakı mövqeyə isə 15 variant $\left(c_6^4 = c_6^2\right)$ uyğun gələcək və s.



3-ci şəkil.

Absis oxu üzərində mövqelərin xarakteristikalarını, yəni otağın sol və ya sağ hissəsindəki adamların sayını (otağın yalnız sağ hissəsindəki adamların sayını qeyd etməyi şərtləşək), ordinat oxu üzərində isə variantların sayını qeyd edək. Otağın sol hissəsindəki adamların sayı mövqeyinin keyfiyyət xarakteristikası qəbul edilməsəydi, asanlıqla paylama dəyişməyəcəyinə əmin olmaq olardı (3-cü şəkil).

Bu mühakimələr «Qaussun normal paylanması» adlanan əyrini almağa imkan yaradır. Dərindən düşünülsə son əyrini də təsvir etmək olar, lakin bu halda çalışırıq ki, yürüdülmüş mülahizələrdən əlavə məlumat əldə edək. Beləliklə, variantların daha çox uyğun gələ bildiyi 5-ci mövqe orta kəmiyyətə uyğun gəlir, yəni adamların 2 otaqda bərabər paylanmasına gətirir, bu da paylanmanın 3 adama uyğun gəlməsi deməkdir.

Beləliklə, orta qiymət normal paylanma əyrisinin maksimumuna uyğundur.

Buradan belə çıxır ki, orta qiyməti almaq üçün əyrinin «uclarını», başqa sözlə, ən yaxşı və ən pis variantları bilmək lazımdır. Aydındır ki, neftvermə əmsalı kifayət qədər geniş intervalda dəyişir. 0,15 – 0,20-dən 0,70 – 0,80-ə qədər. İşin geoloji-texniki təfsilatını öyrənmədən qeyd edək ki, aşağı neftvermə, xüsusi halda, təzyiqin başlanğıc qradiyentli yataqları üçün daha xarakterikdir. Oxşar hadisə iki halda müşahidə olunur: neft qeyri-nyutonluq xassəsinə malik olduqda və bir də neft, su və qazın süzüldüyü lay gilin məlum faizini özündə saxladıqda (məsələn, Abşeron yarımadasında kirmaki lay dəstəsi bir çox hallarda qat-qat qoyulmuş nazik gil və qum təbəqələrindən ibarətdir). Bu faktorların təsiri olduqca mühümdür. Xüsusi halda 200 horizontda aparılan statistik analiz göstərmişdir ki, adi neft layının neftvermə əmsalı 0,40 – 0,50 olan halda, qeyri-nyutonlu xassəli neft üçün eyni geoloji-texniki şəraitdə bu əmsal iki dəfə azdır. Bu əmsal Zaqafqaziyanın bir sıra yataqları üçün, habelə Qazaxıstan, Tatarıstan, Komi ASSR və s. üçün daha xarakterikdir.

Ümumiyyətlə, praktikada qeyri-nyuton xassəli neftlə biz təqribən 30% hallarda rastlaşırıq (kifayət qədər təsiredici kəmiyyətdir).

Mövcud tədqiqat üsullarının çatışmazlığı bizi həddindən artıq ümumi və təqribi göstəricilərdən istifadəyə məcbur edir. Məsələn, müəyyən olunmuşdur ki, verilən yatağın neftvermə əmsalı 0,50-dir. Bu nə deməkdir? Bu o deməkdir ki, bizə mövcud kəmiyyətlərin riyazi əməliyyatlarının nəticəsi olan, özlüyündə isə mövcud olmayan bəzi yekunlaşdırıcı orta qiymətlər məlumdur. Deyək ku, 0,50 orta qiymətində tamamilə müxtəlif neftvermə əmsallarına malik laylar gizlənə bilər: 0,80 və 0,20; 0,75 və 0,25; 0,6 və 0,4... Bu müxtəlif mücərrəd «akademik» xarakter daşımır. Bu işlənib hazırlanmanın düzgün strategiya və taktikası üçün, xüsusi halda aşağıdakı daha

mühüm suallara cavab vermək üçün vacibdir: məsələn, texnologiyanı dəyişdirməklə verilən neftvermə əmsalına malik layı başqa (daha yüksək) qrupa keçirmək olarmı, hansı üsullar burada daha ümidvericidir və s.

Şəkildəki orta müvəffəqiyyət dərəcəsini müəyyən etmək üçün çox qabiliyyətlilərlə az qabiliyyətlilərin sayına, cihazların, mexanizmlərin işini qiymətləndirmək məqsədilə onların ən yaxşı və ən pis nümunələrinə diqqət vermək lazımdır. Aşağıdakı hadisə düzgün olmayan hesabatın nə ilə nəticələndiyinin canlı misalıdır. 1936-cı ildə F.Ruzveltin ABŞ prezitenti seçilməsindən əvvəl telefonla sorğu aparılmışdır. Sorğunun nəticəsi göstərmişdir ki, Ruzveltin seçilməsi ehtimalı azdır. Məlumdur ki, o prezident seçilmişdir. Səbəb sorğunun qeyri-korrekt aparılmasındadır. Belə ki, telefonlar əsasən varlıların evində idi, lakin yoxsullar da səs vermişdilər.

Korrekt sorğu randolaşmış (random-hal) təsadüfi sorğunu nəzərdə tutur.

Əyrinin orta hissəsi ilə yanaşı, onun «uclarını» da bilmək lazımdır. Bu və ya digər dəqiqlik dərəcəsiylə orta kəmiyyət haqqında təsəvvürə malik olmaq üçün nə qədər eksperiment, sınaq və sorğu aparmaq lazımdır.

Məsələn, diametri 32mm olan neft quyusu nasoslarının Çaxnaqlar (Azərb.DR) yataqlarında faktiki ötürmələrini müəyyən etmək üçün aşağıdakı göstəricilər (m^3/gün) alınmışdır: 2,3; 1,0; 0,4; 3,2; 2,5; 2,4; 1,3; 0,6; 0,5; 3,0; 1,6; 2,0; 1,4; 0,9; 2,2; 1,2; 0,7; 1,8; 0,2; 2,0; 2,7; 2,0; 2,0; 2,5; 1,0; 1,8; 2,0; 1,2; 1,3.

Göstəricilərin hər bir qiyməti külliyyatca $x_1, x_2, ..., x_n$ ilə işarə olunur və variant adlanır. Bu statistik yığından variantların ən böyük və ən kiçik qiymətləri seçilir:

$$x_{max} = 3{,}2 \text{ m}^3/\text{gün},$$
$$x_{min} = 0{,}2 \text{ m}^3/\text{gün}.$$

$x_{max} - x_{min} = 3{,}2 - 0{,}2 = 3{,}0$ m^3/gün intervalı genişlik intervalı adlanır.

$x_{max} - x_{min}$ intervalı bərabər hissəyə bölünür:

$$\Delta x \ \frac{x_{mak} - x_{\min}}{k} \ ,$$

burada k – intervalların sayıdır.

$$k = 1 + 3{,}32 \lg N$$

N – variantların sayıdır. ($N = 30$)

$$k = 1 + 3{,}32 \lg 30; \quad k = 6,$$

$$\Delta x = \frac{3{,}0}{6} = 0{,}5 \text{ m}^3\text{/gün};$$

2-ci cədvəl

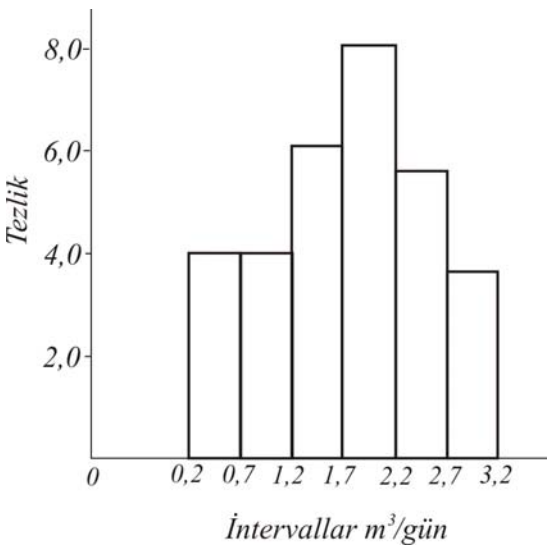
Statistik sıra

İntervalın nömrəsi	İnterval $x_i : x_{i+1}$ m^3/gün	İntervalın orta qiyməti, x_y, m^3/gün	Tezlik, m_i	Tezlik göstəricisi $P_i = \frac{m_i}{N}$	Toplanmış tezlik
1	0,2–0,7	0,45	4	0,13	4
2	0,7–0,2	0,95	4	0,13	8
3	1,2–1,7	1,45	6	0,20	14
4	1,7–2,2	1,95	8	0,27	22
5	2,2–2,7	2,45	5	0,17	27
6	2,7–3,2	2,95	3	0,10	30
	$\sum_{i=1}^{k} m_i = N = 30$		$\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$		

Bununla variantların dəyişmə addımı müəyyən olunur. İntervallar cədvəli onların sərhəd və orta qiymətlərini

göstərməklə tərtib edilir və hər bir intervala düşən müşahidələrin sayı müəyyən olunur. Bu qruplaşdırma üsulu statistik sıra verir (2-ci cədvəl). $x_1 - x_{i+1}$ intervalına düşən müşahidələr sayının (m_i) ümumi müşahidələr sayına nisbəti tezlik göstəricisi (statistik ehtimal) adlanır.

Statistik sıranın qrafik təsviri histoqram (4-cü şəkil) adlanır. Histoqramı üfüqi oxun üzərində qurmaq üçün seçilmiş intervallara uyğun parçalar ayrılır, hər parçanın üzərində isə hündürlükləri verilən intervala düşən müşahidələr tezliyinə bərabər düzbucaqlılar qurulur. Paylanma histoqramına görə tezliklər yığımı əyrisini qururlar. Bunun üçün şaquli ox üzərində Δx_i – intervalına qədər müşahidələr sayının cəminə bərabər toplanmış tezlik, absis ox – üzərində isə hər bir intervalın orta qiyməti ayrılır.



4-cü şəkil.

Yığılmış tezliklərin eksperimental əyrisi (5-ci şəkil) ixtiyari uzunluqda intervala düşən müşahidələr sayını müəyyən etməyə

imkan verir. Məsələn $x_i \leq 1{,}7$ m^3/gün üçün müşahidələrin sayı $n = 16$-dır.

Statistik işlənməyə lazım olan göstəricilərin sayı həmişə məhdud olur və onların yığını seçmə yığın adlanır. Seçmə həcmi mötəbər olmalıdır, daha doğrusu, seçmələr qənaətləndirici təqribiliklə hər hansı baş nəzəri yığını müəyyən etməlidir.

x - nin orta qiyməti və onun riyazi gözləməsi, bütün müşahidələrin nəticələri cəminin $\sum_{i=1}^{N} x_1$ müşahidələrin sayına nisbəti kimi müəyyən olunur:

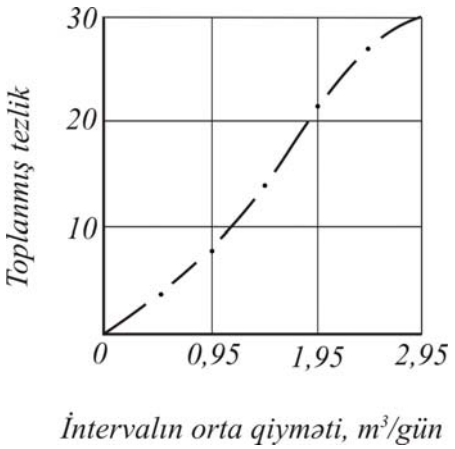
$$\breve{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_1}{N},$$

burada i – müşahidənin nömrəsidir.

x_i^* qiyməti m_i tezliyi ilə rast gələrsə, onda orta çəki

$$\breve{x} = \frac{\sum_{i=l}^{N} x_i^* m_1}{N}$$

düsturu ilə təyin edilir, l – intervalın nömrəsi, k – intervalın sayıdır.



5-ci şəkil.

Məsələn, debitin (bir mənbənin müəyyən vaxtda verdiyi su, qaz, neft və s.) orta çəki qiyməti

$$\tilde{x} = \frac{0{,}45\cdot 4 + 0{,}95\cdot 4 + 1{,}45\cdot 6 + 1{,}95\cdot 8 + 2{,}45\cdot 5 + 2{,}95\cdot 3}{30} = 1{,}7$$

m^3/günə bərabərdir. Statistik sıranın x qiyməti $\tilde{x}$ orta qiyməti ətrafında rəqs edir. $\tilde{x}$ -ə nəzərən səpilmə dərəcəsi $V = \sigma / \tilde{x}$ variasiya əmsalı ilə xarakterizə olunur, burada σ – orta kvadratik meyldir və

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_1 - \tilde{x}\right)^2}{N-1}}$$

burada i – müşahidənin nömrəsidir.

x_i^* parametri m_i tezliyi ilə rast gəlirsə, onda orta kvadratik meyl aşağıdakı düsturla müəyyən olunur:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i^* - \tilde{x}\right)^2 m_i}{N-1}}$$ -dır.

i – burada intervalın nömrəsi, k – intervalın sayıdır.

Məsələn, debitin orta kvadratik meyli (2-ci cədvələ bax)

$$\sigma = \left[\frac{(0{,}45-1{,}7)^2 \cdot 4 + (0{,}95-1{,}7)^2 \cdot 4 + (1{,}45-1{,}7)^2 \cdot 6}{30-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{(1{,}95-1{,}7)^2 \cdot 8 + (2{,}45-1{,}7)^2 \cdot 5 + (2{,}95-1{,}7)^2 \cdot 3}{30-1} \right]^{1/2} = 0{,}75$$

m/gündür.

Orta kvadratik meylin kvadratı dispersiya adlanır:

$$D = \sigma^2 = 0{,}56 \text{ m}^2/\text{gün}^2.$$

$\hat{x}$ kəmiyyəti ortanın qiymətləndirilməsi kimi qəbul olunur və seçmənin həcmi böyüdükcə əsl orta qiymətdən daha az fərqlənir. Hökm etmək olar ki, müəyyən ehtimalla aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\breve{x} - \varepsilon_\beta < \hat{x} < \breve{x} + \varepsilon_\beta.$$

Verilən β ehtimalında axırıncı, son səhv aşağıdakı düsturla müəyyən olunur:

$$\varepsilon_\beta = \frac{t_\beta \cdot \sigma}{\sqrt{N}},$$

t_β – məlum cədvələ görə hesablanır. β = 0,95 olduqda t_β = 1,96, β = 0,99 olduqda isə t_β = 2,58 olur. β = 0,95 olduqda debitin orta qiyməti səhvinin son həddi

$$\varepsilon_\beta = \frac{1{,}96 \cdot 0{,}75}{\sqrt{30}} = 0{,}27 \text{-yə bərabərdir.}$$

Debitin orta qiyməti 0,95 ehtimalı ilə 1,43 м^3/gün < x < 1,97 м^3/gün dəyişir. Qeyd etmək lazımdır ki, ehtimalın səviyyəsinin seçilməsi məsələnin qoyuluşundan asılıdır. Əgər cavabın yüksək dəqiqliyi tələb olunursa, onda ehtimalın yüksək səviyyəsi seçilməlidir.

Ortanı lazım olan dəqiqliklə qiymətləndirmək üçün çox vaxt göstəricilərin sayının az olması kifayət edir. Tutaq ki, orta

debiti müəyyən etmək üçün elə quyular çoxluğu seçmək lazım gəlir ki, məsələn, onların debiti $\beta = 0{,}95$ ehtimalı, $\sigma = 0{,}15$ meyli və $\varepsilon_\beta = 0{,}05$ dəqiqliyi ilə müəyyən edilə bilər.

$$N_1 = \frac{t_\beta^2 \cdot \sigma^2}{\varepsilon_\beta^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}15^2}{0{,}05^2} \approx 35.$$

Bu o deməkdir ki, quyunun orta debitini 5% dəqiqliyi ilə qiymətləndirmək üçün, quyulardan 35-ni isə araşdırmaq üçün ayırmaq lazımdır. Zəruri kəmiyyətləri verilən dəqiqliklə hesablamaq üçün kifayət edən seçmə həcmi (N_I) müəyyən olunandan sonra, ümumi verilənlər çoxluğundan N_I – qiymətlərini düzgün seçmək vacibdir. Bu məqsədlə təsadüfi ədədlər cədvəlindən istifadə etmək lazımdır. Baxılan halda bunun üçün bütün quyular 00, 01, 02, ... 99 qaydası ilə nömrələnir və təsadüfi ədədlər cədvəlinə görə ardıcıl olaraq N_i ikirəqəmli ədədləri yazılır. Seçilmiş nömrəli quyular yoxlanılır.

Bu quyularda aparılan ölçmələr nəticəsində, yoxlanılan sahənin statistik göstəricilərini qiymətləndirmək üçün seçmə yığın alırlar.

Məlumdur ki, bir sıra müsbət tam qiymətli təsadüfi kəmiyyətlər Puasson paylanmasına tabedir. Mürəkkəb hadisələr üçün xarakterik olaraq verilən paylanma sonsuz böyük sayda hadisələrdən təşkil edilmişdir.

Neft və qaz quyularının fasiləsiz işləmə vaxtı, quyunun debiti, ev heyvanlarının məhsuldarlığı, kənd təsərrüfatı bitkilərinin məhsuldarlığı və s. Puasson paylanmasına tabedir.

Qeyd edək ki, Puasson paylanması mürəkkəb proseslərdə hadisələrin asılı olması hipotezinin doğruluğu hallarında tətbiq oluna bilər.

Puasson paylanmasının analizindən alınan belə bir fakt maraqlıdır ki, hadisənin ehtimalı Puasson paylanmasına tabe olan müəyyən göstəricidir ki, bu da ikiqat artırılmış qiyməti ötüb keçir və kifayət qədər kiçik qalır.

Məsələn: yatağın istismarında təmirsiz orta iş vaxtı 100 gün olarsa, onda bu yataqda təmirarası vaxtı 200 gündən artıq olan quyunun olması az ehtimallıdır.

5-ci misal. Böyük ədədlər qanununda deyilir ki, sınaqların sayı qeyri-məhdud artdıqda, tezlik ehtimala bərabər sərhəddə yaxınlaşır. Qeyd edək ki, kifayət qədər çox olmayan sınaqlar nəticəsində tezlik ehtimala yaxınlaşmayıb, müxtəlif qiymətlər arasında rəqs edir. Bu isə onun nəticəsidir ki, ehtimal sabit qalmayıb, sınaqlar prosesində dəyişir. Qeyd olunanlar orta yaşama müddətini artıran təbabət və gigiyenanın inkişafı nəticəsində dəyişilə bilən insanın ömür müddətinin təyinində yaxşı illüstrasiya oluna bilər. Təbiidir ki, XVIII, XIX və XX əsrlərdə doğulan uşaqlar üçün 60 – 70 il yaşama ehtimalı artmağa doğru gedir. Belə məlumatlar başqa elmi uzaqgörmə metodları olmasını və çox miqdarda müşahidələrdən istifadə etmək zəruri olduğu halda xeyirlidir. Böyük ədədlər qanunundan istifadə edərək ehtimalı əvvəldən hesablamaq mümkün olmayan elementar faktlar üçün isə daha çox mənfəət əldə etmək olar.

Məsələn: «tək-cüt» oyununda ehtimal $\frac{1}{2}$ - ə bərabərdir; və ya kinetikadan başqa bir misal; qarşılıqlı təsir etmək üçün heç olmasa görüşmək lazımdır. Kimyəvi reaksiyalarda molekullar, yaxud atomlar, ekologiyada vaşaqlar dovşanlarla görüşə bilər. Bir qayda olaraq, bu görüşlər təsadüfidir və bunun hər birini əvvəlcədən demək mümkün deyil. Kinetikada baxılan proseslər onların ehtimallarına reaksiya verən obyektlərin konsentrasiyasını hesablamağa imkan verən çoxlu sayda görüşlərdən ibarət olur. Kimyəvi reaksiya halında adi konsentrasiya başa düşülür.

Ekologiyanın problemlərində baxılan rayonun xüsusiyyətləri də rol oynayır. Böyük ədədlər qanununun düzgün tətbiq olunmasına aid bir misal gətirək. Bir həkim statistikadan aşağıdakı kimi istifadə etmişdir: əgər ona

müəyyən xəstəliklərlə əlaqədar xəstə müraciət etmişsə, həkim birinci növbədə bu cür xəstələrin neçə faizinin tamamilə sağalmasını yoxlayır. Bu, məsələn, 90%-dirsə, həkim bu cür xəstəliyi olan xəstələrinin siyahısına baxıb deyir ki, 10 xəstədən 9-u artıq sağalmışdır, deməli, bu xəstə müalicə oluna bilməz (yəni bu xəstə 10% müalicəsi mümkün olmayanlar sırasındadır).

Başqa bir misal. Bu xəstəliyə tutulan 10 adamdan 9-u mütləq ölür. Sizin isə bəxtiniz yaman gətirir, belə ki, sizə qədər müalicə olunan 9 xəstə ölmüşdür.

Belə bir müəmma mövcuddur ki, yalan «müqəddəs» pislik naminə və statistikada* olur. Bu haqda Taleyran demişdir ki, statistika – əxlaqsız qadındır. Lakin yuxarıda gətirdiyimiz misal və qeyd edilənlər statistikanın qeyri-düzgün tətbiqindən irəli gəlir. Qeyd edək ki, bu ancaq statistikaya aid deyil. İstənilən təklifi qeyri-düzgün istifadə nəticəsində mənasızlığa gətirib çıxarmaq olar. Deyilənlər çox vaxt əhatə olunmayanı əhatə etmək arzusundan irəli gəlir.

Statistika da digər başqa alətlər kimi təcrübəli əllərdə gələcəyin qiymətləndirilməsinə böyük kömək göstərər, bacarıqsız əllərə düşəndə isə böyük ziyan vura bilər.

Üçüncü dərəcəli mədə xərçəngi xəstəliyinə aid misal gətirək. Cərrahiyyə əməliyyatı aparılan xəstələrin ancaq 30 – 35%-i 5 il yaşayır. Əgər bu halda ölənlərin sayını 100% qəbul etsək, onların 50%-i birinci iki ildə, bunların da çox hissəsi birinci ildə müşahidə olunur. Beləliklə, cərrahiyyə əməliyyatı müvəffəqiyyətlə keçən xəstələrin orta ömür müddəti demək

---

* Dizraeli iddia edir ki, yalanın üç növü mövcuddur: sadə yalan, həyasızcasına və statistiki yalan. Dizraeli Bendjamin Lord Bikosfild (1804 – 1881) ingilis siyasi xadimi, yazıçıdır. Ədəbiyyatşünas İsaak Dizraelinin oğludur. O, «Sibilla və ya iki millət» (1845) romanında ağıllı və humanist aristokratiya adı altında sosial əksliklərin yalan barışığını göstərmişdir. Kitab çıxandan sonra «iki millət» sözündən siniflərə bölünən cəmiyyəti işarə etmək üçün istifadə edildi.

olar ki, cərrahiyyə əməliyyatı aparılmayan xəstələrin orta ömür müddətini aşmır. Misaldan aydın olur ki, detallaşdırıcı yanaşma qərar qəbul etməyə münasibəti necə dəyişə bilər.

Real həyatda bizi əhatə edən bir çox statistik göstəricilər təəccüblü dayanıqlıq xassəsinə malikdir. Misallara baxaq:

0.514 ədədi demoqrafiyada yaxşı məlumdur. Bu yeni doğulan uşaqlar içərisində oğlanların sayını ifadə edir. Bu qanunauyğunluğa ilk dəfə diqqət edən alimlərdən biri alman təbiət-sınaqçısı A. Qumbolt (1769 – 1859) olmuşdur. O, bu hadisənin bəşəriyyət üçün ümumi qanun olması təklifini irəli sürmüşdür. Qumbolt müəyyən etmişdir ki, bu nisbət 22/21-ə bərabərdir.

Qumboltdan sonra bu problemi məşhur fransız riyaziyyatçısı P. Laplas daha dolğun öyrənmişdir. Lakin o statistik göstəriciləri işləyib tamamilə başqa qiymət alır. 1745-ci ildən Parisdə metrik kitablarında yeni doğulanları qeydə almağa başlayırlar. 1784-cü ilin axırına kimi Parisdə 393386 oğlan uşağı və 377555 qız uşağı xaç suyuna salınmışdır. Bu isə təqribən 25/24 nisbətindədir. Təbiidir ki, Laplas əldə edilən bu nisbətin Qumboltun aldığı nisbətdən nəyə görə fərqləndiyini aydınlaşdırmağa çalışmışdır. O, çox böyük işlər görmüşdür. 40 illik metrik kitablarını diqqətlə öyrənərək Laplas müəyyən edir ki, uşaq evinə verilən uşaqlar kitaba iki dəfə yazılır: anadan olanda və bir də uşaq evinə düşəndən sonra. Belə ki, kəndlilər uşaq evinə qızları oğlanlara nisbətən daha çox verirlər. Bu kişik dəqiqsizlik də qızların sayının doğulan bütün uşaqların sayına olan nisbətinin artmasına gətirib çıxarmışdır.

Statistik göstəricilərin dayanıqlıq xassəsindən ölüm cədvəli adlanan cədvəli hesablamaq üçün istifadə olunur. Laplas bu məsələyə daha çox diqqət yetirirdi. Müəyyən olunmuşdur ki, ölüm faizi müəyyən sabit həyat şəraitində bu və ya başqa səbəbdən kifayət qədər sabit kəmiyyətdir.

6-cı misal. Biz elmi-texniki tərəqqi əsrində yaşayırıq. Bu həqiqət xüsusi isbat tələb etmir. Bizim gözlərimiz qarşısında

təyyarələrin sürəti artır, kosmik gəmilər ay materiklərindən su gətirir, televizor ekranlarında ağ-qara təsvirlər rəngli təsvirlərlə əvəz olunur, bəşəriyyət sivilizasiyanın daha yüksək pilləsinə qədəm qoyur.

Beləliklə, bizim hər birimiz elmi-texniki tərəqqinin bizə nə verdiyini bilirik. Biz həmişə təsəvvür edirikmi ki, bunlar haradan götürülür? Nə isə vermək üçün aydındır ki, onu haradansa götürmək lazımdır.

Elmi-texniki tərəqqi çoxlu səbəblərlə şərtlənir. Ən başlıcası elmin özünün rolunun dəyişməsi, onun bilavasitə istehsal qüvvəsinə çevrilməsidir. Əvvəllər elmi kəşfə və onun praktiki istifadəsinə yüz və min illər lazım gəlmişsə, indi buna illər, bəzən aylar lazım gəlir.

Lakin bu prosesin öz-özünə, necə deyərlər avtomatik getməsini düşünmək sadəlövhlük olardı. Əlbəttə, müasir elmin imkanları hüdudsuzdur, lakin onların realizasiyası, praktikada istifadə etmək üçün böyük əmək sərf edilməsi, müxtəlif elm sahələrinin, o cümlədən alimlərin və istehsalçıların birgə səyi lazımdır. Bu qarşılıqlı əlaqəni yaratmaq heç də asan iş deyil, ancaq bunun effekti olduqca böyük olur; olduqca, bəlkə də tamamilə mücərrəd elmi nəzəriyyə tez və inamla praktikaya daxil olur, həyatın müxtəlif sahələrindəki problemlərin həllinə kömək edərək işlənməyə başlayır.

Buna əyani misal eksperimental riyazi nəzəriyyəsini göstərmək olar. Məşhur ingilis alimi Con Bernal öz dövründə belə bir ziddiyyətli fikrə gəlib çıxmışdı ki, fiziki-kimyəvi eksperimentin faydalı təsir əmsalı birinci buxar maşınında olduğu kimi 2 faizdir*. Burada eksperimentin müvəffəqiyyətli olmasından, onun uğurlu və uğursuz nəticələrindən deyil, təcrübələrin aparılma üsulundan söhbət gedirdi. Bernalın fikrincə, təcrübə qeyri-mütəşəkkil qoyularsa, müəyyən bir nəticənin alınması üçün sərf edilən əmək mütəşəkkil haldakından əlli dəfə çox olur.

---

* 10-cu və 11-ci misallara bax.

Bu fikir alimlərin diqqətini cəlb etmiş, onlara elmi əməyin təşkilinə tənqidi yanaşmağı öyrətmişdir. Bu əgər belədirsə, deməli, alim öz qiymətli vaxtının böyük hissəsini səmərəsiz keçirir. Özü də harada – özünün xüsusi «evində» – laboratoriyada, haradakı o əməyin əsl elmi təşkilini göstərməlidir?!

Bu, mücərrəd maraq deyil. Bir neçə ölkədə başlanan tədqiqatlar eksperimentin riyazi nəzəriyyəsinin yaranmasına gətirib çıxarmışdır. Elmi işin FİƏ (faydalı iş əmsalı) yüksəldilməsi – nəticə etibarilə çox qiymətlidir. Lakin bəlkə də daha mühüm – eksperimentin riyazi nəzəriyyəsi imkan vermişdir ki, insan fəaliyyətinin bir çox sahələrinə – elmi təcrübədən olduqca uzaq olan sahələrinə təzədən baxılsın.

Bizim hamımız, məsələn, təcrübəli həkimə təcrübəsiz həkimdən çox üstünlük veririk. Bu nə deməkdir – «təcrübəli» «təcrübəsizdən» nə ilə fərqlənir? Aydındır ki, iş heç də «təcrübəli»nin çox bilməsində deyil, onun özünün çoxillik təcrübəsində müxtəlif hallarla qarşılaşmasındadır. İstər-istəməz bu hadisələr onun təfəkküründə qruplaşaraq müəyyən sistem yaradır. Alimlərin dili ilə desək, təcrübənin formalaşması baş verir.

Bu formalaşmış təcrübə heç də həmişə qaydaya çevrilmir. Yeni hal ilə qarşılaşan təcrübəli həkim bu halı yaddaşında qalan oxşar hallarla mütləq müqayisə edir. Bu, düzgün diaqnoz qoymağa, müalicə metodunu seçməyə və nəhayət onları xəstənin şəxsi xüsusiyyətlərini nəzərə almaqla korrektə etməyə imkan verir. Aydındır ki, ən təcrübəli həkimin şəxsi təcrübəsi 100, ən çoxu 1000 halla məhduddur. Təbabətin təcrübəsi müqayisəedilməz dərəcədə genişdir və hər bir həkim təcrübələr yığını ilə buna malik olsaydı, heç bir problem qalmazdı. İnsan yaddaşı məhdud olduğundan, öz
təcrübəsi ilə möhkəmlənməyib, başqasının təcrübəsi pis mənimsənildiyindən və nəhayət təcrübənin formalaşması heç

də asan məsələ olmadığından təcrübədə buna nail olmaq çətindir.

Eyni zamanda ideya özü olduqca cəlbedicidir. Bu istiqamətdə iş artıq aparılır, ancaq təcrübənin «akkumulyatoru» əvəzinə insan yox, qeyri-məhdud yaddaşlı praktiki elektron hesablama maşını götürülür.

Onun öyrənilməsi əsasında eksperimentin riyazi nəzəriyyəsi metodlarından biri – sürətlərin müəyyən edilməsi üsulu qoyulmuşdur. Prinsipcə bu metodun məğzi sadədir: insan (və ya maşın) n halda hər hansı əmelləri öyrənərək, strategiyanın müəyyən üsullarını hazırlayaraq, bu üsulu eni (n+1)-ci hala tətbiq edir. Bu ancaq nəzəriyyədə belədir. Bəs praktikada? Misal üçün tibbi götürək. Yeni doğulanlarda ürək qüsurunu müəyyən edən diaqnostikada maşın metodlarının praktiki tətbiqi
1962 – 1963-cü illərdə A. V. Vişnevski adına Cərrahiyyə İnstitutunda başlanmışdır. Artıq ilk nəticələr ümidverici idi: 70%-ə qədər hallarda maşın düzgün diaqnoz qoymuşdur. Diaqnostikanın müvəffəqiyyətləri tədricən artır və iki ildən sonra bu rəqəm 91%-ə çatır. Ayrı-ayrı xəstəliklər üzrə isə 100 haldan 97-sində maşın düzgün nəticə verir.

Bu o deməkdir ki, cəmi 2 – 3 il ərzində maşın lazımi təcrübə əldə edə bilmiş, daha doğrusu, «stajlı» həkim olmuşdur. Ancaq iş yalnız bunda deyil. Aydındır ki, ürəyin anadangəlmə qüsur xəstəliyini cərrahiyyə üsulu ilə araşdırmaq lazım gəlir. Bu cür üsullar qorxusuz deyildir. Bunlarda xüsusi hallarda ölümlə nəticələnən ciddi çətinliklər meydana çıxır. Buna baxmayaraq, həkimlər bu üsuldan istifadə edirlər, çünki bu cür araşdırmalar dolğun məlumatlıdır və əksər hallarda bu məlumatlarsız düzgün diaqnoz qoymaq mümkün deyil. Aydın olur ki, maşınla diaqnoz qoyduqda 86% hallarda cərrahiyyə əməliyyatı tətbiq etmədən keçinmək olar. Başqa sözlə desək, gələcəkdə maşın nəinki təzə fəaliyyətə başlayan həkimə

nisbətən, hətta təcrübəli həkimə nisbətən də üstünlüyə malik olacaqdır. Artıqlaması ilə qiymətləndirilə biləcək hal.

Burada heç bir möcüzə yoxdur. Əvvəla, maşın yaddaşı həkimin yaddaşından (ən təcrübəlisinin) daha əhatəlidir. İkincisi, maşın yalnız ən başlıcasını yox, həm də, az əhəmiyyətli əlamətləri, onların yığınını da tədqiq edir. Oxşar kompleks yanaşma xüsusi çətin hallarda da düzgün diaqnoz qoymağa imkan verir.

Beləliklə, indi demək olar ki, tibbi diaqnostika üçün EHM-lərdən istifadə olunması əsl nəzəri işlər çərçivəsindən kənara çıxır və tam praktiki forma alır.

Eksperimentin riyazi nəzəriyyəsi istehsalat qarşısında daha geniş imkanlar açır. Bu istiqamətdə ilk addımlar artıq atılmışdır, ancaq etiraf etməliyik ki, yeni imkanlardan biz hələlik az istifadə edirik. Artıq bu gün, obrazın anlaşılması metodunun köməyi ilə tamamilə hiss olunan praktiki nəticələr almaq olar.

Məsələn, quyunun neft verməsini artıran üsullardan birini – hidropartlayışı götürək. Məlumdur ki, bu üsul, ümumiyyətlə, kifayət qədər effektivdir. Ümumiyyətlə nə deməkdir? Statistika göstərir ki, hidropartlayış 10 haldan 4 – 5-də hiss olunan dərəcədə fayda gətirir. Bu çoxdur, yoxsa azdır? Prinsip etibarilə çoxdur, çünki bu şərtlər daxilində də qoyulmuş xərclər «yaxşı» quyularda neft istehsalının artımı ilə kompensasiya olunur. Digər tərəfdən onunla razılaşmaq çətindir ki, geoloji-texniki tədbirlərin işlənib hazırlanması prosesində əvvəlcədən biz bilirik ki, hər bir iki haldan birində vaxt, əmək və ləvazimat nahaq yerə sərf olunacaqdır.

40 – 50% orta göstəricidir. Yatağın xüsusiyyətini, hər quyunun xasiyyətini yaxşı bilən təcrübəli mühəndis 100 haldan 60 – 70-ni duyur. Hansı əlamətlərinə görə, necə duyur? Biz hələlik bu suallara cavab verə bilmərik, yəqin ki, o da qaydaları aydın ifadə etməyi bacarmır. Səbəblər həkimlə olan misaldakı kimidir – mühəndis təcrübəsi formalaşmayıb, aydın strategiya

şəklində ifadə edilməyibdir. Sadəcə olaraq təcrübəli mühəndisin şüurunda hər hansı miqdarda hallar toplanıbdır, bax, bu hallarda hidropartlayış müvəffəqiyyət gətirir, bunlar isə yox. Bununla yanaşı obrazların tanınması metodu cəhətdən məsələ ciddi, ardıcıl edilə bilər.

Sadə halı götürək. Fərz edək ki, hidropartlayışın müvəffəqiyyəti və ya müvəffəqiyyətsizliyini biz iki faktorla bağlayırıq: layın əvvəlki debiti və gücü ilə. Bu kəmiyyətləri tapmaq çətin deyil: debit məlumdur, güc isə karotaj diaqramına əsasən müəyyən edilir.

Beləliklə, müəyyən sayda quyular üçün hidropartlayış verilənləri götürək və bunları həmin parametrləri nəzərə alaraq təkmilləşdirək. Təkmilləşdirilmənin nəticəsini həndəsi ifadə etsək, iki asılılıq sistemi (nöqtələrin) alınar. Debit və lay gücü birləşməsinə uyğun olan bir qrup nəticələr «hə» (hidropartlayış effektivdir) – başqa qrup isə «yox» halına (hidropartlayış effektiv deyil) uyğun olacaqdır.

Bu diaqramdan istifadə edərək, biz hər quyu üçün hidropartlayışın nəticəsini əvvəlcədən söyləyə bilərik.

Bunun üçün məlum verilənlərdən (debit və plastın gücü) istifadə edərək, bu nöqtəni diaqramda qurmaq kifayətdir. Burada üç hal mümkündür: nöqtə «hə» oblastına düşür (hidropartlayışın mənası var), «yox» oblastına (mənası yoxdur) və ya onların arasına (effekt şübhəlidir) düşür.

Həqiqətdə isə hidropartlayışın effektliyi iki yox, daha çox səbəbdən asılıdır: doldurulan mayenin təzyiqi, doldurulma sürəti, bu mayedəki faizi və s. Ancaq bu müxtəliflik artıq kəmiyyətcədir, riyazi işləmə üçün xüsusi çətinlik törətmir.

Beləliklə,biz işin müvəffəqiyyətinin asılı olduğu müxtəlif səbəbləri nəzərə almaq əsasında məsləhətə (hidropartlayış tətbiq etmək və ya tətbiq etməmək) imkan verən diaqramla sərəncam verəcəyik.

Bu istiqamətdə işi davam etdirərək, biz cavabları fərqləndirə bilərik. Sadə «hə» və «yox» əvəzinə, diaqram

mümkün nəticələrin tam külliyyatını verəcəkdir: çox effektivdir, orta effektivdir, az effektivdir və s.

Ancaq bu hamısı deyil. İndiyə qədər sistemə passiv kimi baxırdıq. Başqa sözlə desək, fərz edirik ki, biz hansı hallarda hidropartlayışın müvəffəqiyyət gətirdiyini bilərik, ancaq nəticəyə təsir edə bilmərik. Bunu bilmək də, şübhəsiz, vacibdir, ancaq metodun həqiqi imkanları daha genişdir.

Doğrudan da, əgər müəyyən parametrlər (quyunun debiti, layın gücü) bizdən asılı deyilsə, onda başqalarını (artma təzyiqi, mayedə qumun miqdarı, vurma sürəti və s.) tamamilə nizamlamaq mümkündür. Deməli, diaqramda bu parametrlərin müxtəlif vəziyyətlərini qabaqcadan göstərməyə, maksimal effektli hidropartlayış yaratmağa imkan verən optimal variantı seçə bilirik.

Təbii sual meydana çıxır: bu nəzəri mülahizələr təcrübə ilə təsdiq olunurmu? Ümumittifaq elmi-tədqiqat Neft İnstitutunun və Əzizbəyov adına Azərbaycan Neft Akademiyasının Tatarıstanın Romaşkin yatağında 92 mədən üzrə apardığı uyğun tədqiqatlar hidropartlayış strategiyasını hazırlamağa imkan vermişdir. Burada tapma faizi 40 – 50-dən 80-ə qalxmışdır, yəni tapma faizi bir yarım dəfədən çox artmışdır.

Bu nə verir? Tədqiqat aparılmış quyular qrupu üzrə 36 min manat gəlir (effekt) əldə edilmişdir. Bu, özlüyündə xeyli məbləğdir. Lakin nəzərə almaq lazımdır ki, təcrübə məhdud miqyasda – cəmi 92 buruqdan və həm də qatlara yalnız bir üsulla – hidropartlayış üsulu ilə təsir etməklə aparılmışdır. Obrazların duyulması, müəyyən edilməsi üsulunun qatlara təsirinin daha başqa üsullarla və eləcə də müxtəlif geoloji-texniki tədbirlərlə (ildə 10 mindən çox) tətbiq oluna bilməsini xatırlasaq, onda minimal iqtisadi səmərə 3,5 – 4 milyon manat məbləğində olar. Bundan başqa da o maraqlıdır ki, ölkə yüz min və milyon tonlarla əlavə neft alacaqdır, özü də məsrəfsiz alacaqdır, çünki bütün axtarışlar təbiətdə deyil, ixtiyari, ən mürəkkəb variantların uduzulması ölçülə bilməyən dərəcədə az

vaxt əmək və vasitə sərf olunması ilə əlaqədar olan EHM-də aparılacaqdır.

«Təsnifat dərketmənin yüksək növüdür» fikri Planka aiddir. Digər tərəfdən, hər bir təsnifat tam deyildir. Bu, K. Qedelin aşağıdakı şəkildə ifadə edilə bilən teoremindən alınır: hər bir ixtiyari formalaşmış sistemdə formalaşmamış qalıq qalır.

Təsnifatın dədidliyini və tamlığını artırmaq üçün təsnif edilən obyektə olan münasibəti və mümkün olan əlaqələri, onun inkişafı və yaranması şərtlərini tam nəzərə almaq zəruridir.

7-ci misal. Obyektlərin ən sadə və eyni zamanda ən effektli təsnifat üsullarından biri ranq təsnifat üsuludur. Bu təsnifat üsulu aşağıdakılardan ibarətdir: əvvəlcə xarakterizə edən ən çox informasiyalı əlamətləri seçirlər. Hər bir əlamətin bütün dəyişmə diapazonu intervallara bölünür və onların hər biri müəyyən bir ranq ədədi ilə işarə olunur.

Müəyyən intervala düşən əlamətlərin hər birinə bu intervala üyğun gələn ranq qiymətini verirlər. Verilmiş obyektin təsnifat funksiyası bu obyekti xarakterizə edən bütün əlamətlər üzrə ranqların cəmi ilə təyin olunur: $\Phi = \sum_{i=1}^{k} R\, x_i$. Fərz edək ki, yeni qaz-kondensat yatağının hansı tipə – neft haşiyəli, yaxud neft haşiyəsiz qaz-kondensat yatağına aid etməyi müəyyənləşdirmək lazımdır. İstehsalat texnologiyasının seçilməsi, qurğuların tikintisinə sərf olunan kapital xərcləri və onların lazım olan avadanlıqla təchiz edilməsi düzgün qoyulmuş diaqnozdan asılıdır. Bütün bunlar milyon-milyon manatlardır. Yatağın tipi düzgün təyin edilməsə, bu milyonlar itirilə bilər.

C_1, c_2, c_3 və c_5 əlamətlərinə görə qaz-kondensat yatağının dərk olunması misalında ranqlı təsnifatın necə tətbiq olunmasına baxaq. 59 qaz-kondensat yatağının, o cümlədən 30 neft kabeli (haşiyəli) yatağın qaz qatlarının analizindən alınan nəticələr tədqiq edilmişdir. Hər bir əlamətin qiymətlər intervalı

və onlara uyğun ranqları 3-cü cədvəldə verilmişdir. Ranq qiymətləri cəmi 10-dan böyük olan yataqların neft haşiyəsi olur (yuxarı astana), 8-dən kiçik olan yataqlarınkı isə olmur (aşağı limit).

3-ci cədvəl

Yatağın tipi

Komponentlər	Mol. tərkibi, %-lə	Ranqlar
c_1	100-90 90-80 80-70 70-60 60-50	1 2 3 4 5
c_2	1-4 4-7 7-10 10-13 13 və daha çox	1 2 3 4 5
c_3	0-1 1-2 2-3 3-4 4-5	1 2 3 4 5
c_4	0-0,5 0,5-1,0 1,0-1,5 1,5-2,0 2,0 və daha çox	1 2 3 4 5
c_5	0-1 1-2 2-3 3-4 4 və daha çox	1 2 3 4 5

4-cü cədvəldə Sanqaçal-dəniz tipli yataqların dərk edilməsi misalı verilmişdir, ranqların cəmi 10-dan böyük olduğundan bu

yataqlar neft haşiyəlidir. Bu üsul (ranq təsnifat üsulu) yeni qaz-kondensat yataqların tipini 0,92 ehtimalla təyin etməyə imkan verir. Bu zaman nəzərə almaq lazımdır ki, səhv «kiçik» olsa da, bizə baha başa gələ bilər (9-cu misala bax). Deməli, bu diaqnostika metodlarını tətbiq edərkən nəzərə almaq lazımdır ki, onlar köməkçi xarakter daşıyırlar.

Statistika diskriminat analizinin ideyalarına əsaslanan diaqnostikanın ədədi üsullarından istifadə olunması misalına müraciət edək.

İşin mahiyyəti bundadır ki, hər bir xarakteristikaya ədədi qiymət verirlər (xalların sayı).

4-ci cədvəl

Sanqaçal-neft yatağı; buruq № 97

Komponentlər	Mol. tərkibi, %-lə	Ranqlar
c_1	90,4	1
c_2	3,0	2
c_3	1,3	3
c_4	0,8	4
c_5	4,1	5
Ranqların cəmi		11

Xalların sayı cəmi müəyyən həddən azdırsa, obyekt bir qrupa, çoxdursa başqa bir qrupa aid edilir. N. Beylinin «Riyaziyyat biologiyada və təbabətdə» (M., «Мир» 1970 г.) kitabında tireotoksikoz xəstəliyinin diaqnostikasına misal gətirilir. Buraya mütəxəssislər aşağıdakı sxemlə hər bir əlamətlə müəyyən sayda xallar qarşı qoyurlar:

Əlamətlər	Var	Yoxdur
Təngnəfəslik	+1	0
Ürəkdöyünmə	+2	0

Yorğunluq	+2	0
Xəstənin istidən xoşu gəlir	0	–5
Xəstənin soyuqdan xoşu gəlir	+5	0
Tərləmə	+3	0
Əsəbilik	+2	0
Yüksək iştaha və s.	+3	0
Cəmi 28 əlamət	0	–3

Bundan sonra iki qrup adamlar seçilmiş və hər qrup üçün xalların cəmi hesablanmışdır. Bir qrupda tireotoksikozlu 83 xəstə, digərində isə 99 sağlam adam vardır. Müəyyən edilmişdir ki, əgər xalların cəmi 20-dən çoxdursa, bu adam tireotoksikoz xəstəliyinə tutulubdur, əgər +20-dən azdırsa sağlamdır. Diaqnoztikada +20 ədədi kriteriya kimi götürülmüşdür.

Bundan sonra həkimlərin diaqnoz qoymaqda çətinlik çəkdikləri 118 adam seçilmişdir. Onların üzərində kriteriyanın düzgünlüyü yoxlanılmış, sonra isə ən yeni

I. Faktorun dəyişmə intervalı	0-0,07	0,07-0,14	0,14-0,21	0,21-0,28
Ranq	1	2	3	4
II. Faktorun dəyişmə intervalı	0-0,1	0,1-0,2	0,2-0,3	0,3-0,4
Ranq	1	2	3	4
III. Faktorun dəyişmə intervalı	0-0,5	0,05-0,10	0,10-0,15	0,15-0,20
Ranq	1	2	3	4
IV. Faktorun dəyişmə intervalı	0-30	30-60	60-90	90-120
Ranq	1	2	3	4
V. Faktorun dəyişmə intervalı	0-80	80-130	130-180	180-230

Ranq	1	2	3	4
VI. Faktorun dəyişmə intervalı	0-5	5-10	10-15	15-20
Ranq	10	9	8	7
VII. Rejim	Həll olunmuş qaz			Qaz
Ranq		1		4

Qeyd: I–VII– neftverməyə təsir edən aktorlardır

aparaturanın köməyi ilə həm də müalicənin nəticələrini nəzərə almaqla uzun müddət müşahidə aparılmışdır. Həkimlər 51 halda tireotoksikoz xəstəliyinin olduğunu qəti söyləmişlər. Qalan 67 adam sağlam çıxmışlar. Xəstələrdən 45 nəfərinin (80%) xalları +20-dən az deyildi; 6 nəfərinin (12%) isə +11-dən +19-a qədər idi. Sağlam adamlardan ancaq birinin (1,5%) xallarının cəmi +20-dən çox idi. Sonra bu yoxlama daha 4 xəstəxanada aparıldı və müəyyən edildi ki, bu üsul həkimlərin rəyinin müxtəlif olduğu şübhəli hallarda 0,85 ehtimalı ilə düzgün diaqnoz verir. Məhz bu hallarda ehtimal metodları dəyərlidir. Bu daha bir analiz üsuludur. Təcrübəli əllərdə bu üsul xüsusilə daha dəqiq metodları tətbiq etmək mümkün olmadıqda xeyir verə bilər. Qısası, həkimlər başqa metodların daha pis cavablar verdiyi praktik suallara tam dəqiq olmayan cavablar vermək üsulunu alırlar.

Neftvermə əmsalını qiymətləndirmək üçün ranqlı təsnifat metodunu tətbiq etmək olar. Ranqlı təsnifat metodu ilə təyin edilən neftvermə əmsalının hesablanmasının nəticələri, xüsusilə ilkin verilənlər yüksək dəqiqliyə malik olmadıqda, statistik analizə əsaslanan uyğun göstəricilərdən mahiyyətcə az fərqlənirlər.

5-ci cədvəl

0,28-0,35	0,35-0,42	0,42-0,49	0,49-0,56	0,56-0,0,63	0,63
5	6	7	8	9	10
0,4-0,5	0,5-0,8	0,8-1,1	1,1-1,4	1,4-1,7	1,7
5	6	7	8	9	10
0,20-0,25	0,25-0,30	0,30-0,35	0,35-0,40	0,40-0,45	0,45
5	6	7	8	9	10
120-150	150-200	200-250	250-300	300-400	400
5	6	7	8	9	10
230-280	280-330	330-380	380-430	430-530	530
5	6	7	8	9	10
20-25	25-30	30-40	40-50	50-60	60
6	5	4	3	2	1
Qarışıq		Sutəzyiqli			
7		10			

Ranqlı təsnifat metodu Abşeronun 93 yatağının neftvermə əmsalını qiymətləndirmək üçün tətbiq olunmuşdur. Neftverməyə təsir edən faktorlar aşağıdakılardır.

I. İlk 10 illik dövrdə ehtiyatlardan istifadəetmə əmsalı.
II. Bu dövrdə çıxarılan mayenin neftin əvvəlki balans ehtiyatına olan nisbəti.
III. Başlanğıc 5 illik dövrdə ehtiyatlardan istifadəetmə əmsalı.
IV. Həcmdən ayrılan suyun %-lə miqdarı.
V. Kollektorun mD-də nüfuz etməsi.
VI. Buruqların işlədiyi müddətdə şəbəkənin orta sıxlığı.
VII. Qatların iş rejimi.
VIII. Gil fraksiyasının tərkibi (%-lə).

IX. Qətranın tərkibi (%-lə).

Aparılan birfaktorlu qrafiki analiz ilk 7 faktorun neftvermə əmsalına ən çox təsir
etdiyini aşkar etmişdir. Analiz edilən yataqlar özlüyü kiçik hüdudlarda dəyişdiyinə və Nyuton nefti saxladığına görə tətbiq edilən metodlar özlülüyün bu neftin neftvermə əmsalına təsirini aşkar etməyə imkan vermir. İşlətmə sürətinin neftvermə əmsalına təsiri şərti xarakter daşıyır, belə ki, əsas neftvermə başlıca olaraq son ildə alınmışdır.

Ranqlı təsnifat metodunun illüstrasiyası üçün (7 ən çox informasiyalı faktora görə: I – birinci on il müddətində ehtiyatlardan istifadəolunma əmsalı; II – bu dövrdə çıxarılan maye miqdarının başlanğıc balans ehtiyatına olan nisbəti; III – başlanğıc müddətində ehtiyatlardan istifadəetmə əmsalı; IV – məsamələrdən çıxarılan suyun miqdarı (faizlə); V – kollektorun nüfuzetməsi, m. d. ; VI – bütün tədqiqat dövründə quyu setkalarının orta sıxlığı, $\frac{qa}{quyu}$; VII – layın iş rejimi) neftvermə əmsalı şərti olaraq üç oblasta bölünür:

$$0 \le \eta \le 0{,}2; \qquad 0{,}2 \le \eta \le 0{,}5: \qquad \eta > 0{,}5$$

Uyğun faktorun və neftvermə əmsalının korrelyasiya xarakterini nəzərə almaqla
baxılan faktorların dəyişmə intervalları R ranqları ilə 1-dən 10-a kimi şifirlənmişdir (5-ci cədvəl). Mədən materiallarının ranq təsnifatı əsasında işlənməsi nəticəsində müxtəlif yataqların neftvermə əmsalının ranqların cəminə görə qiymətləndirilməsi qaydası alınmışdır. Buruqların şəbəkələrinin sıxlığını göstərmədən üç yatağın hesablanmasına aid misal göstərək.

A – yatağı üçün işləmə prosesini təyin edən faktorlar belədir:

I – 0,050; II – 0,132; III – 0,021; IV – 7% ; V – 150 mD;

VII – həll olunan qazın rejimi. 5-ci cədvələ uyğun olaraq baxılan əlamətlərə belə ranqlar təsir edir: $R_{I} = 1$; $R_{II} = 2$; $R_{III} = 1$; $R_{IV} = 1$; $R_{V} = 3$; $R_{VI} = 3$; $R_{VII} = 1$. Onların bütün faktorlara

görə cəmi 12-yə bərabərdir, deməli, qiymətləndirmə qaydasına görə (5-ci cədvəl) $\eta \leq 2$.

B – yatağı üçün uyğun olaraq alırıq: I – 0,130; II – 0,693; III – 0,028; IV – 116,0% ; V – 127 mD.

VII – qarışıq rejim. 6-cı cədvələ görə alırıq: $R_{I} = 2$; $R_{II} = 6$; $R_{III} = 1$; $R_{IV} = 4$; $R_{V} = 2$; $R_{VI} = 4$; $R_{VII} = 7$.

Ranqların cəmi 26-dır və 6-cı cədvələ görə təyin edirik ki, neftvermə əmsalı $0,2 \leq \eta \leq 0,5$-dir.

6-ci cədvəl

Ranqların cəmi	18	18	38	38
Neftvermə əmsalı	0,2	0,2	0,5	0,5

C – yatağı üçün

I – 0,500; II – 0,838; III – 0,220; IV – 267,0% ; V – 142 mD; VII – sutəzyiqli rejim. Uyğun ranqlar belədir: $R_{I} = 8$; $R_{II} = 7$; $R_{III} = 5$; $R_{IV} = 8$; $R_{V} = 3$; $R_{VI} = 9$; $R_{VII} = 10$.

Ranqların cəmi 50-dir və 6-cı cədvələ görə $\eta > 0,5$. Təklif olunan metodun Abşeronun 93 yatağında aprobasiyası zamanı bütün tədqiqatların 85%-də neftvermə əmsalı seçilmiş intervallara görə bölünmüşdür.

Baxılan metod riyazi və məntiqi cəhətdən əsaslandırılmamışdır və onun tətbiqi yalnız praktiki cəhətdən effektliliyi, hesablama vasitələrinin sadə və asanlığı ilə bəraət qazana bilər (klassik məsəl: «qalibləri mühakimə etmirlər»).

8-ci misal. İstənilən təsadüfi hadisə bərabər ehtimallı nəticələr miqdarının κ artması ilə artan bu və ya digər qeyri-müəyyənlik dərəcəsinə malikdir.

Entropiya* anlayışından istifadə edərək qeyri-müəyyənlik ölçüsünü qiymətləndirmək olar. $\kappa = 1$ olduqda qeyri-müəyyənliyin ölçüsü sıfra bərabərdir. *k*-nın artması ilə entropiya artır. İki hadisə götürək: birinin başlanğıc

* Entropiya termini yunan-trope-çevrilmə sözünə ƏH (enerji) sözünü artırılmaqla düzəldilmşdir.

verilənlərinin miqdarı $\kappa = \alpha \cdot \beta$ olar. Təbii olaraq fərz edək ki, mürəkkəb hadisənin qeyri-müəyyənlik ölçüsü Э iki asılı olmayan hadisənin qeyri-müəyyənlik ölçülərinin cəminə bərabərdir:

$$Э_1(\kappa) = Э_1(\alpha) + Э_1(\beta) \quad \text{və ya} \quad Э_1(\alpha\beta) = Э_1(\alpha) + Э_1(\beta).$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, bu şərti loqarifmik funksiya ödəyir, yəni
$\log_2 \alpha\beta = \log_2 \alpha + \log_2 \beta$. Beləliklə: $Э_1 = \log_2 \kappa$. Bu düstur 1927-ci ildə Xartli tərəfindən alınmışdır. 2 əsası ixtiyari seçilmişdir və bu $Э_1$-in yalnız ədədi qiymətində öz əksini tapır, lakin bu halda nəzərə almaq lazımdır ki, bu, müəyyən mənada ikilik kodu ilə bağlıdır, yəni qeyri-müəyyənlik dərəcəsinin ölçü vahidi $\kappa = 2$ olan dayağın qeyri-müəyyənlik dərəcəsi qəbul olunur («hə» və ya «yox», 0 və 1).

Sınağın ümumi qeyri-müəyyənliyi $\log_2 \kappa$ olduğundan qəbul etmək olar ki, $\frac{1}{k}$ ehtimalına malik olan hər bir nəticə aşağıdakı qeyri-müəyyənliyi daxil edir:

$$\frac{1}{k} \log_2 k = -\frac{1}{k} \log_2 \frac{1}{k} \cdot$$

Ümumi halda ehtimalları $p_1, p_2, \ldots, p_k$ olan sınağın qeyri-müəyyənlik ölçüsü:

$$Э = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log p_2 - \cdots - p_k \log_2 p_k = -\sum_{i-1}^{k} p_i \log_2 p_1$$

olacaqdır.
$p \to p_1$ və $p_1 \to 0$ olduqda $k = 1$ üçün qeyri-müəyyənlik ölcüsü $Э_1 = -p_1 \log p_1$ olacaqdır, bu isə $0 \cdot \infty$ tipli qeyri-müəyyənlikdir.

Lopital qaydasından istifadə etsək,

$$Э = -\lim_{p_1 \to 0}(p_1 . loq_2 p_1) = -\lim_{p_1 \to 0}\left(\frac{loq_2 p_1}{\frac{1}{p_1}}\right) = -\lim_{p_1 \to 0}\frac{(\log_2 p_1)'}{\left(\frac{1}{p_1}\right)'} =$$

$$= -\lim_{p_1 \to 0_1}\frac{(\log_2 1 \ In \ p_1)'}{\left(\frac{1}{p_1}\right)'} = -\log_2 1 \lim\left(-\frac{\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_1^2}}\right) = loq_2 1 \lim_{p_1 \to 0} p_1 = 0$$

alarıq.

Bu kəmiyyət entropiya adlanır və 1948-ci ildə K. Şennon tərəfindən informasiya nəzəriyyəsində təklif edilmişdir. Qeyri-müəyyənliyin ölçü vahidi ikilik sistemində vahid və ya bit adlanır. Əgər loqarifmanın əsası 10 qəbul edilmişdirsə, onda entropiyanın ölçü vahidi – dit adlanır. Sadələşdirərək demək olar ki, hər hansı bir cavab nə qədər çox gözlənilməzdirsə, o, bir o qədər də çox məlumatlıdır. Məsələn, əgər siz restorana gəlirsinizsə və sizə ofisiant yumurta təklif edərkən deyirsə ki, onlar təzədir, təbiidir ki, belə cavab informatik deyil. Lakin sizə yumurta təklif edərkən desələr ki, onlar köhnədir (əlbəttə, yemək norması təzə yumurta olan adam üçün), onda belə cavab artıq informasiyadır. Bu baxımdan daha çox məlumatlı mülahizəyə misal olaraq R. Bernsin S. Marşak tərəfindən tərcümə olunmuş şerini göstərə bilərik.

Yox, onun baxışı yalançı deyil,
Onun gözləri yalan demir
Onlar doğru deyirlər ki,
Onun sahibi fırıldaqçıdır!

Bədii informasiyanın nədən ibarət olduğunu araşdıraq.

Bunun üçün N. V. Qoqolun «Ölü canlar» əsərinin birinci bölməsinin birinci abzasına müraciət edək.

«Quberniya şəhərciyinin mehmanxanasının darvazasından kifayət qədər qəşəng, çox da böyük olmayan ressorlu fayton girdi: belə faytona adətən subaylar, ehtiyatda olan podpolkovniklər, ştabs-kapitanlar, yüz başa yaxın kəndlisi olan mülkədarlar, bir sözlə, ortabab cənablar minirlər. Faytonda oturan cənab nə qəşəng idi, nə də axmaq görkəmə malik idi, nə kök, nə də arıq idi, demək olmazdı ki, qocadır, lakin cavan da deyildi. Onun gəlişi şəhərdə heç bir hay-küyə səbəb olmadı».

İnformasiyanı ölçmək üçün Şennon informasiya ilə verilən mənanı nəzərə almır.

Məsələn, əgər valideyn qəbul imtahanlarının nəticəsini gözləyirsə, onun oğlunun ali məktəbə daxil olması və olmaması valideynə I bitdə informasiya verir. Oğlan və ya qızın doğulması xəbəri də 1 bitdə informasiya verir.

Deməli, entropiya anlayışı bütün informativ prosesləri araşdırmaq üçün tətbiq edilə bilər və informasiyanın icrasından (insandan, heyvandan, EHM-dən və s.) asılı deyil.

Kim isə tamamilə doğru olaraq demişdir ki, AİS və EHM düzgün tətbiq edilmədikdə, yalnız üç hərfin kombinasiyasına çevrilə bilər.

Həmçinin güman etmək olmaz ki, üç fövqaladə sözün – informasiya, entropiya, artıqlıq – köməyi ilə bütün həlledilməyən problemləri həll etmək olar.

Fərz edək ki, k bərabər ehtimallı nəticəyə malik olan bütün sınıqlar içərisində $\frac{1}{k}$ eyni ehtimallı cədvələ malik olan sınaq daha çox qeyri-müəyyəndir. k=2 qəbul edək. Ehtimalları p və $1-p$ olan iki nəticəli entropiyanı təyin edək:

$$Э(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p).$$

$Э$-nin P-yə görə törəməsini sıfra bərabər edib, p-nin $Э$-yə ekstremum verən qiymətini tapaq:

$$\frac{dЭ}{dp} = -\log_2 p - p\frac{1}{p} + \log_2(1-p) + (1-p)\frac{1}{1-p} = 0,$$

$$\log_2 \frac{1-p}{p} = 0,$$

$$\frac{1-p}{p} = 1, p = \frac{1}{2}.$$

Seçmə yolu ilə Э üçün düsturun çıxarılışına keçək. $Э_1(1) = 0$ şərti k –nın artması ilə müxtəlif düsturları ödəyir, məsələn,

$$Э = k - 1, \quad Э = k^3 - 1, \quad Э = \log_2 k.$$

Bu düsturların hansına üstünlük vermək olar? Bu üç modeli bir-birindən fərqləndirmək üçün yenə də xəyali eksperimentə müraciət etmək zəruridir.

Aşağıdakı məsələyə baxaq, suallar vermə və alternativ cavablar («hə» və yaxud «yox») almaq yolu ilə 1 və 10; 1 və 100; 1 və 1000 arasında yerləşən fikirdə tutulan ədədi tapmalı. Axtarıb tapmaq strategiyası aşağıdakından ibarətdir: fərz edilir ki, fikirdə tutulan ədəd 6-dır. Birinci sual verilir – 5-dən böyükdür? cavab – bəli. Bundan sonra 5 və 10 arasındakı interval təxminən yarıya bölünür və aşağıdakı sual verilir – 8-dən böyükdür? cavab – yox. Sonra 5 və 8 arasındakı interval yenə də təxminən yarıya bölünür və sual verilir – 7-dən böyükdür? cavab – yox. Sonra 5 və 7 arasındakı interval yarıya bölünür və sual verilir – 6-dan böyükdür? cavab – yox. Deməli, fikirdə tutulan ədəd 6-dır. Beləliklə, başlanğıc verilənlər 10 olduqda axtarılan ədədi tapmaq üçün 4 sual vermək lazımdır. Bu eksperimenti ikinci halda, yəni ədəd 1 ilə 100 arasında olanda təkrar edərək asanlıqla yəqin edərik ki, sualların sayı 7, 1-lə 1000 arasında olduqda 10, 1-lə 10000 arasında olduqda isə 14 olacaqdır.

Bu rəqəmlər orta hesabla 4,7, 10 və 14-dür. Verilənlərin sayı artdıqda entropiya da artır, yəni verilənlərin miqdarı 10-dursa, suallar 4-dür. Verilənlərin sayı 10 dəfə artdı, sualların

sayı isə təxminən 2 dəfə artdı, 3-cü halda verilənlərin miqdarı 100 dəfə artdı, sualların sayı 2,5* dəfə və s. Birinci və ikinci formullar keyfiyyət artımını ödəmirlər, daha məqsədəuyğun üçüncü formuldur.

Bu misalda biz modellərin bir-birindən fərqləndirilməsi üsullarından birini göstərdik. Axtarış strategiyası tərtib edərkən aşağıdakıları nəzərdə tutmaq lazımdır:

Baxılan zaman qeyri-müəyyənlik dərəcəsi ardıcıl olaraq azalırdı, lakin bununla belə biz bir sual verməklə ədədi tapa bilərik, bu artıq uğurdur. Eyni ilə əgər kimsə labirintə düşürsə və oradan onun çıxması zəruridirsə, onda o, qanuna riayət edərək sağ və ya sol tərəfi tutmaqla mütləq labirintdən çıxacaqdır. Lakin uğurlu yol seçməklə, heç bir qaydaya əməl etmədən də oradan çıxmaq olar, bu, artıq xoşbəxtlikdir.

Rasional həllərin qəbul edilməsi nəzəriyyəsi məsələnin strukturuna görə həllin strukturunu təyin edən hərəkət tərzi nəzəriyyəsinin bir variantıdır. Hətta belə bir zarafat da var ki, insan o qədər də irrasional deyil ki, nəzəriyyəyə uyğun qərar qəbul etsin. Bunu ehtimallı təlim misalı üzərindən keçirək. İki lampa yana bilər: qırmızı (A_1 hadisəsi) və ağ (A_2 hadisəsi). Bu hadisə müəyyən nisbi p, $1-p(p \geq 0{,}5)$ tezliyi ilə təsadüfi baş verir. Tutaq ki, $p = 9{,}7$, onda $1-p = 0{,}3$ olar. Hər bir sınaqda sınaqçı əvvəlcədən optimal strategiya seçərək hansı hadisənin baş verdiyini deməlidir. Verilən halda qərar qəbul etmək üçün düzgün cavabların orta miqdarının maksimallaşması strategiyasına baxmaq olar, yəni

$$y = p \cdot p_1 + (1-p)(1-p_1), \qquad (1)$$

burada p_1 və $1-p_1$ qırmızı və ağ lampanın yanmasının qabaqcadan qəbul edilən tezliyidir. (1) ifadəsi məqsəd funksiyası adlanır. (1)-dən alınır ki, tədqiqatçı həmişə qırmızı lampanın yanmasını təmin edən qərarı qəbul etdikdə, yəni

---

* Asanlıqla müəyyən etmək olar ki, əgər verilən sualların miqdarını n-lə, başlanğıc verilənlərin miqdarını k ilə işarə etsək, onda $2^n \geq k$ olar.

«hamısı və ya heç nə» strategiyası olduqda qabaqcadan deyilən düzgün cavabların miqdarı ən böyük olur.

$$\frac{dy}{dp_1} = p - 1 + p = 2p - 1 = 0, \quad \text{yəni} \quad p = \frac{1}{2}.$$

p_1 tezliyinin p-yə «yaxınlaşmasından» ibarət olan başqa strategiya da ola bilər.

Bu üsuldan istifadə edərək tədqiqatçı əvvəlcədən deyə bilər ki, 0,7 tezliyi ilə qırmızı, 0,3 tezliyi ilə ağ lampa yanacaqdır.

Məlumdur ki, bu halda düzgün cavabların orta ehtimalı 0,68-ə çatır. Bu halda diqqəti ona yönəltmək lazımdır ki, qərar qəbul edən sınaqçı düzgün cavablara nail olmağı istəməklə bərabər, monotonluqdan da yaxa qurtarmağa çalışır, yəni reaksiyaların müxtəlifliyinə can atır.

Sürücülərə yaxşı tanış olan belə bir qayda var: yol nə qədər mürəkkəbdirsə və sürət nə qədər böyükdürsə, bir o qədər çox diqqətli olmaq və qabağa baxmaq lazımdır. Bu qaydanın mahiyyəti ondan ibarətdir ki, mürəkkəb yolda yüksək sürət zamanı qərar qəbul etmək vaxtı minimuma enir. Qərarın ağlabatanlığı və eləcə də belə hallarda reaksiyanın tezliyi, avtomaşındakı yaxşı tormozun olmasından az rol oynamır.

9-cu misal. İki bir-birini inkar edən: ifadəyə gətirilən, fikrə gələn alternativ proqnozun müxtəlif metodlarının qiymətləndirilməsinə baxaq. Gözlənilir və gözlənilmir. Metrologiyada bundan ötrü məlumat münasibətindən və dəqiqlik əlamətindən istifadə olunur. Alternativ proqnozların müvəffəqiyyətliliyinin qabaqcadan düzgün söylənilən hadisələrin faizinə görə qiymətləndirilməsi üsulu nadir hadisələrə nisbətən nəticələrin kənar edilməsinə görə də həmişə qənaətbəxş deyil.

Tutaq ki, qabaqcadan deyilmiş y_1 və y_2 hadisələrinin proqnozlarının ehtimalı uyğun olaraq $p(x_1)$ və $p(x_2)$-dir. y_1 və y_2 hadisələrinin proqnozunun ehtimalı, bu hadisələr varsa, onların proqnozunun ehtimalları cəmindən, bu hadisələrin proqnozu yoxdursa, onda ehtimallardan düzəlir, yəni

$$P(x_1) = P(y_1)\,P(x_1) + P(y_2) \cdot P(x_1) \qquad (1)$$

$$P(x_2) = P(y_2)\,P(x_2) + P(y_1) \cdot P(x_2) \qquad (2)$$

Müvəffəqiyyət proqnozunun ehtimalı

$$P(y) = P(y_1)\,P(x_1) + P(y_2)\,P(x_2) \qquad (3)$$

olacaqdır.

(1), (2), (3)-dən

$$P(y) = P(y_2) - P(x_1)\ [P(y_2) - P(y_1)] \qquad (4)$$

almaq olar.

$p\ (y_1) < p\ (y_2)$ olsa, onda tətbiq edilən üsul nöqteyi-nəzərindən $p\ (x_1) = 0$ olduqda daha müvəffəq proqnoz olar. Bu üsul o vaxt tətbiq edilə bilər ki, proqnozun xətasının qiyməti bütün hallarda eynidir. Xətanın qiyməti əhəmiyyətli dərəcədə fərqlidirsə, başqa üsuldan istifadə olunmalıdır. Misal olaraq iri yataqlardan neft və qazçıxarma əmsalının pronozlaşdırılmasındakı xətanı göstərmək olar. Bu halda o, «kişik» yataqların proqnozlaşdırılmasındakı xəta ilə müqayisə oluna bilər. Bununla belə iri yataqlara nisbətən az təsadüf edilir. MDB-də bu cür nəhəng neft yatağı Samotlar yatağıdır. Bu hallarda müvəffəqiyyətlilik faizinə nəzərən proqnozlaşdırma qənaətbəxş hesab edilmir (7-ci misala bax). Belə hallarda nisbətən nadir hadisələrə əsaslanır və özünü doğrultma cədvəli tərtib edilir (7-ci cədvəl). Bu məqsədlə məlumat nisbəti meyarından istifadə olunur.

7-ci cədvəl

Sinif	Proqnoz		
	x_1	x_2	cəm
y_1	$П_{11}$	$П_{12}$	N_1
y_2	$П_{21}$	$П_{22}$	N_2

Bunun üçün informatik münasibət kriteriyasından

$$N = 1 - \frac{Э_x(y)}{Э(y)},$$

istifadə edirlər, burada $Э(y)$ y_1 – hadisələrin qeyri-müəyyənlik ölçüsüdür.

$Э_x(y)$ x_1 proqnozlarının nəticələri məlumdur, y_1 – hadisələrin qeyri-müəyyənlik ölçüsüdür.

$Э(y)$-in qeyri-müəyyənlik ölçüsü olaraq

$$Э(y) = -\sum_{i=1}^{2} P(y_i) \log P(y_i)$$

$$Э_x(y) = -\sum_{i=1}^{2} P(x_i) - \sum_{1-1}^{2} P_{ij} \cdot \log P_{ij}$$

entropiyası götürülür, burada $P(y_1) - y_i$ hadisəsinin başvermə ehtimalı,

$$P(x_i) = \frac{П_{1j} + П_{2j}}{N} - x_i$$ – proqnozunun ehtimalı,

$$P_{ij} = \frac{П_{1j}}{П_{1j} + П_{2j}} - x_i$$ – proqnozunun nəticəsi

məlum olduqda y_{ij} hadisələrinin şərti ehtimalıdır.

Ən çox informasiyaya malik olan ən yaxşı proqnoz üsulu sayılır, yəni $Э_x(y)$ daha kiçik olsun.

A. M. Obuxov səhv proqnozların təkrar olunmasını təsvir etmək üçün onların təkrar edilməsini ifadə edən iki ədəd daxil etmişdir; hadisə baş verdikdə (α) ədədini, y_i hadisəsi baş verdikdə isə (β) ədədini daxil edir.

$$\alpha = \frac{П_{12}}{П_{11} + П_{12}}; \qquad \beta = \frac{П_{21}}{П_{21} + П_{22}}.$$

Əgər bir-birilə müqayisə edilən iki hadisədən biri α_1 və β_1 ilə, ikincisi α_2 və β_2 ilə xarakterizə edilirsə, onda $\alpha_1 < \alpha_2$, $\beta_1 < \beta_2$ olduqda birinci üsul ikincidən yaxşı, $\alpha_1 > \alpha_2$, $\beta_1 > \beta_2$ olduqda isə birinci üsul ikincidən pis hesab edilir. Bu halda bu

və ya başqa üsuldan istifadə etməyin mümkün olduğu tətbiq oblastını göstərmək olar. Bunun üçün düzgün proqnoz verən və düzgün olmayan proqnozlaşdırmadan irəli gələn orta iqtisadi effekti bilmək zəruridir. Obuxovun Q dəqiqlik kriteriyası aşağıdakı münasibətlə təyin edilir:

$$Q = 1 - \alpha - \beta,$$

α və β-nın qiymətini (9)-da yerinə yazsaq

$$Q = \frac{\Pi_{11}\Pi_{22} - \Pi_{12}\Pi_{21}}{N_1 \cdot N_2}$$

alarıq, bu isə reqressiya ilə üst-üstə düşür.

Məlumat münasibəti və dəqiqlik kriteriyası, qazkondensat tipli yataqların proqnozlaşdırılmasının üç üsulundan müqayisə üçün istifadə edək (potensial funksiyaların baş komponentlərinin qurulması və Styudent kriteriyası).

A – baş komponent üsulu

B – potensial funksiyalar üsulu

C – Styudent kriteriyası

A, *B* və *C* proqnozları üçün özünü doğrultma cədvəlini tərtib edək.

A proqnozu

yatağın tipi	x_2	x_2	Σ
neftli haşiyə	26 (Π_{11})	23 (Π_{22})	29 N_1
neftsiz haşiyə	7 (Π_{21})	3 (Π_{12})	30 N_2

B proqnozu

yatağın tipi	x_2	x_2	Σ
neftli haşiyə	27	2	29
neftsiz haşiyə	4	26	30

C proqnozu

yatağın tipi	x_1	x_2	Σ
neftli haşiyə	24	5	29
neftsiz haşiyə	0	30	30

$P_{x\,j}(y_i) = P_{i\,j}$ şərti ehtimalları və $P_{i\,j}$ ehtimallarının cədvəlini tərtib edək.

A proqnozu

P_{ij}	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	0,79	0,12
$i = 2$	0,21	0,78
$P(x_j)$	0,56	0,44

B proqnozu

P_{ij}	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	0,87	0,07
$i = 2$	0,13	0,93
$P(x_j)$	0,53	0,47

C proqnozu

P_{ij}	$j = 1$	$j = 2$
$i = 1$	1,0	0,14
$i = 2$	0,0	0,86
$P(x_j)$	0,41	0,59

Qaz-kondensat tipli yatağın qeyri-müəyyənlik ölçüsünü təyin edək.

$$Э\ (y) = -\left(\frac{29}{59}\ \lg\ \frac{29}{59} + \frac{30}{59}\ \lg\ \frac{30}{59}\right) = 0{,}30$$

Şərti entropiyanın qiymətini tapaq:

A proqnozu: $Э_x(y) = -0{,}56\,(0{,}79 \lg 0{,}79 + 0{,}21 \lg 0{,}21) - 0{,}44\,(0{,}12 \lg 0{,}12 +$
$+ 0{,}88 \lg 0{,}88) = 0{,}13 + 0{,}07 = 0{,}20.$
B proqnozu: $Э_x(y) = 0{,}09 + 0{,}05 = 0{,}14$
C proqnozu: $Э_x(y) = 0{,}104$
Beləliklə, məlumat nisbətləri

$$И_A = \frac{0{,}20}{0{,}30} = 0{,}67; \qquad И_B = \frac{0{,}14}{0{,}30} = 0{,}33;$$

$$И_C = \frac{0{,}104}{0{,}30} = 0{,}35.$$

Sonra dəqiqlik kriteriyası Q-nu təyin edək. Bu məqsədlə aşağıdakıları hesablayaq.

1. y hadisəsi baş verdikdə (α) proqnozların təkrarlanması

A proqnozu: $\alpha_A = \dfrac{П_{12}}{П_{11} + П_{12}} = \dfrac{3}{26+3} = 0{,}103;$

B proqnozu: $\alpha_B = \dfrac{2}{27+2} = 0{,}069;$

C proqnozu: $\alpha_C = \dfrac{5}{24+5} = 0{,}172;$

II. Hadisə baş vermədikdə (β) proqnozların təkrarlanması

A proqnozu: $\beta_A = \dfrac{П_{21}}{П_{21} + П_{22}} = \dfrac{7}{7+23} = 0{,}230;$

B proqnozu: $\beta_B = \dfrac{4}{4+26} = 0{,}133;$

C proqnozu: $\beta_C = \dfrac{0}{30} = 0;$

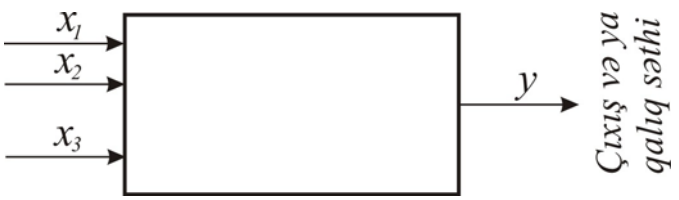
hesablayaq.
Onda:

$$Q_A = 1 - \alpha_A - \beta_A = 1 - 0{,}103 - 0{,}23 = 0{,}67$$
$$Q_B = 1 - 0{,}069 - 0{,}133 = 0{,}79$$
$$Q_C = 1 - 0{,}172 - 0 = 0{,}82$$

Göstərilən misalda alınan nəticələr iki kriteriya üzrə tutuşdurulur: məlumat münasibəti və üst-üstə düşməyən dəqiqlik. Belə hallarda məlumat münasibətinə üstünlük vermək lazımdır, çünki dəqiqlik meyarına görə Q_A və Q_C müqayisə ediləcək dərəcədə az fərqlənirlər. Bundan əlavə, qeyri-parametrik metodları («parzen pəncərəsi» metodu, «yaxın qonşular» metodu, «potensial funksiyalar» metodu və s.) tətbiq etdikdə, aşağıdakını nəzərə almaq lazımdır: əlamətlər fəzasının ölçüsü böyük və seçmənin həcmi kiçik olduqda ehtimalın naməlum paylama funksiyasının etibarlı bərpası mümkün deyil. Həlledici qaydanı qurmaq üçün, məsələn, əlamətlərin miqdarı n = 10 olduqda «parzen pəncərəsi»nin köməyi ilə öyrədən seçmənin həcminin N > 400 olması tələb olunur. Fəzanın ölçüsü artdıqda, etibarlı təlim üçün seçmənin həcmi ekspotensial artır.

10-cu misal. Əgər həm təbiyyətcə, həm də təsir qüvvəsinə görə müxtəlif olan, böyük miqdarda bir-birilə qarşılıqlı təsirdə olan faktorlar nəzərə alınmadıqda eksperiment aparsaq, yəni sadə «yaxşı təşkil edilmiş sistemlərə» deyil, diffuz – «pis təşkil edilmiş sistemlərə» baxsaq, onda eksperimental tədqiqat zəruriliyi meydana çıxır. Məlumdur ki, elmi-tədqiqatların dəyəri bu tədqiqatlarda iştirak edən amillər miqdarının (n) kvadratı ilə mütənasib olaraq artır, səmərəlilik isə $\sqrt{n}$ -nə münasib olaraq artır. Bu halda təbiidir ki, elmi-tədqiqatlara sərf edilən xərclərin artma sürəti azalmalıdır. Bu da öz növbəsində elmi-tədqiqat işlərinin effektivliyinin artma zərurətini qabaqcadan müəyyən edir. Yayılan eksperiment aparmaq əsasında düzgün axtarış strategiyasından istifadə edərək eksperimentlərin miqdarının əhəmiyyətli dərəcədə azaldılmasının mümkünlüyünə aid misal göstərək.

Tutaq ki, bizim öyrəndiyimiz proses «daxil olan» kəmiyyətlər adlanan
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ faktorlarının təsir etdiyi «çıxan» y kəmiyyəti ilə təyin edilir, yəni y «qara qutunun» işinin nəticəsidir (6-cı şəkil).



6-cı şəkil.

Bu halda $(n - 1)$ faktoru qeyd edib, bir faktoru dəyişdirsək, çoxlu miqdarda sınaq aparmaq lazım gələcəkdir, məsələn, n = 4-dürsə, yəni y-ə 4 faktor təsir edirsə, onda x_1, x_2, x_3, x_4, ayrılıqda, tutaq ki, 5 səviyyədə dəyişərsə, $5^4 = 625$ eksperiment aparmaq lazım gələr. Belə böyük miqdarda eksperiment aparmaq, xüsusilə onlar texnoloji proseslərə aiddirsə, həmişə mümkün olmur.

4 faktorlu proses misalında başlanğıc mərhələ analizin başlanğıc etapına, yəni az təsir edən faktorları aradan çıxarmağa imkan verən kobud qiymətləndirməyə baxaq. Sınaqların ümumi miqdarı $(n + 1)$-dən çox olmaqla 2^n-ə yaxın olmalıdır (n = 3, 4, ...). Proses 4 faktorludursa, $(n + 1) = 5$ və deməli, 8 eksperiment aparmaq lazımdır. 8-dən 15-ədək faktorlu proseslərdə 16 eksperimentin aparılması zəruridir.

Sınaqların aparılma miqdarı 8-ci misala görə, yəni hər bir faktor iki səviyyədə – aşağı və yuxarı səviyyədə dəyişdikdə (ən kiçik və ən böyük qiymətini aldıqda) əsaslandırılır.

11-ci misal. Qum, temperatur, təzyiq miqdarının iki markalı dağ süxurunun möhkəmliyinə təsirinə baxaq.

8-ci cədvəldə dağ süxurlarının qumun qatılıq dərəcəsindən (x_1, %), temperatu- rundan (x_2, ^0k), təzyiqindən (x_3, n/m^2) və başqa markalarından asılı olaraq gərilməyə qarşı möhkəmliyi göstərilmişdir. 4-cü cədvəldə göstərilən faktorların aşağı səviyyəsi ən kiçik qiymətlərə, yuxarı səviyyəsi isə ən böyük qiymətlərə uyğundur (+ işarəsi). Eksperimentin planını – onun aparılma matrisini qurmaq lazımdır. Bu halda mahiyyəti aşağıdakından ibarət olan və «papaq» adlanan üsulu tətbiq etmək olar. «Papaqda» olanlardan eyni miqdarda «÷» və «–»-lar tərtib edilir və hər bir təsadüfi sınağa görə ardıcıllıqla seçilir.

8-ci cədvəl

	Faktorlar				
	Qumun qıtlığı x_1, %	Tempera-tur x_2, °K	Təzyiq $x_3 10^{-5}$ n/m^2	Suxurun markası x_4	Dağ suxun gərilməyə olan keyf. meyarı $y \cdot 10^{-5}$ n/m^2
Aşağı səviyyə	10	293	50	A	
Yuxarı səviyyə	20	373	200	B	

I təcrübə:

x_1 = 10%, x_2 = 373$^\circ k$, x_3 = 50·10^{-5} n/m^2, x_4 – A -nın markasıdır. Bunun keçirilməsi nəticəsində gərilməyə qarşı möhkəmliyin aşağıdakı qiyməti alınır:

$$y = 300 \cdot 10^{-5} \text{ n/m}^2.$$

II təcrübə: x_1 = 20%, x_2 = 373$^\circ k$, x_3 = 50·10^{-5} n/m^2, x_4 – B markası,

$$y = 150 \cdot 10^{-5} \text{n/m}^2.$$

III təcrübə: x_1 = 10%, x_2 = 293$^\circ k$, x_3 = 50·10^{-5} n/m^2, x_4 – B markası,

$$y = 180 \cdot 10^{-5} \text{ n/m}^2 \text{ və s.}$$

Təcrübələrin nəticəsini 9-cu cədvələ yazaq.

9-ci cədvəl.

Təcrübənin №-si	x_1	x_2	x_3	x_4	$y(10^{-5}$ n/m$^3)$
1	–	+	–	+	300
2	+	+	–	–	150
3	–	–	–	–	180
4	+	–	+	–	120
5	+	+	+	+	80
6	–	+	+	–	280
7	+	–	–	+	100
8	–	–	+	+	230

Təcrübənin təsadüfi seçilməsində müəyyən balansa riayət etmək lazımdır. Cədvəldə işarələrin yerləşmə sırası üst-üstə düşən sütunlar olmalıdır və beləliklə də təsadüfi balans gözlənilməlidir (təsadüfi balans üsulu). Eksperimentin qoyulması strategiyası hər bir faktora ekstremal-kənar qiymət verilməsindən ibarətdir. Baxılan (x_1, x_2, x_3, x_4) faktorlardan asılı olaraq çıxan y kəmiyyətinin səpilməsinə diqqət edək. x_1-in aşağı səviyyədə qiyməti üçün (qumun qatılığı 10% olduqda) dağ süxurunun gərilməyə qarşı möhkəmliyinin aşağıdakı qiymətini alırıq:

$$y – 300, 180, 280, 230\ (\cdot 10^{-5}\ \text{n/m}^2).$$

Alınan qiymətləri azalan ardıcıllıqla düzəldək:

$$300, 280, 230, 180\ (\cdot 10^{-5}\ \text{n/m}^2).$$

y-in 300, 180 ($\cdot 10^{-5}$ n/m^2) kənar qiymətlərini ataq və (280 + 230)/2 = 255$\cdot 10^{-5}$ n/m^2 orta qiymətini tapaq.

Qumun qatılığının yuxarı səviyyədə dəyişməsinin gərilməyə qarşı möhkəmliyinin qiymətləri 150, 120, 80, 100 ($\cdot 10^{-5}$ n/m^2)-dür. Yenidən azalan ardıcıllıqla düzərək $150, 120, 100, 80\ (\cdot 10^{-5}\ \text{n/m}^2)$ alırıq. Kənar qiymətləri atıb $(120+100)/2 = 110\ (\cdot 10^{-5}$ n/m2) orta qiymətini tapırıq. Beləliklə, çıxan kəmiyyətin səpələnməsi 145$\cdot 10^{-5}$ n/m^2 (255 – 110 = 145) olacaqdır.

x_2 – faktoru – aşağı səviyyədə temperaturun – qiymətləri üçün dağ süxurunun gəril- məyə qarşı aşağıdakı möhkəmlik göstəricilərini alırıq: 180, 120, 100, 230($\cdot 10^{-5}$ n/m^2).

Bunları azalan ardıcıllıqla düzüb kənar qiymətləri (230, 100($\cdot 10^{-5}$ n/m^2)) ataraq $150 \cdot 10^{-5}$ n/m^2-ə bərabər olan orta qiyməti tapırıq. Temperaturun qiymətlərinin dəyişməsinin yuxarı səviyyəsində çıxan kəmiyyətin qiymətləri 300, 150, 80, 280 ($\cdot 10^{-5}$n/m^2) olmuşdur. 300 və 80 ($\cdot 10^{-5}$ n/m^2) qiymətləri atıb $215 \cdot 10^{-5}$ n/m^2-ə bərabər olan qiyməti alırıq. Gərilmə $65 \cdot 10^{-5}$ n/m^2 olacaqdır.

Təzyiq qiymətlərinin (x_3) aşağı səviyyədə dəyişməsində aşağıdakı göstəriciləri alırıq: 300, 150, 180, 100($\cdot 10^{-5}$ n/m^2). 300 və 100($\cdot 10^{-5}$ n/m^2) kənar qiymətlər kimi atılır və nəticədə orta qiymət 165 $\cdot 10^{-5}$ n/m^2-ə bərabər olur.

Dəyişmənin yuxarı səviyyəsində y-in 120, 80, 280, 230($\cdot 10^{-5}$ n/m^2)-ə bərabər qiymətləri alınmışdır. Anoloji olaraq 280 və 80($\cdot 10^{-5}$ n/m^2) qiymətlərini atıb $175 \cdot 10^{-5}$ n/m^2-ə bərabər qiymətini alırıq. Səpələnmə, göründüyü kimi, $10 \cdot 10^{-5}$ n/m^2-na bərabərdir.

Dağ süxuru markasının aşağı səviyyədə dəyişməsi üçün gərilməyə qarşı möhkəmliyin qiymətləri 150, 180, 120 və 280 ($\cdot 10^{-5}$ n/m^2)-nə bərabərdir. 280 və 120(10^{-5}n/m^2) qiymətləri atılır və 165 $\cdot 10^{-5}$ n/m^2 orta qiyməti tapılır. Yuxarı səviyyədə y, 300, 80, 100, 230 ($\cdot 10^{-5}$ n/m^2) qiymətlərini alır. Səpələnmə təyin edildikdə hər bir səviyyənin ($| x_i^+ + x_i^- |$) orta qiymətlər fərqinin mütləq qiyməti götürülür. Səpələnmənin alınmış qiymətlərinə görə, uyğun giriş faktorların çıxış qiymətlərə təsir dərəcəsinin analizi kobud qiymətləndirilir. Bu halda deyirlər ki, böyük səpələnmə qiymətinə malik olan faktor ən böyük və əksinə, kiçik səpələnmə qiymətinə malik olan faktor isə ən kiçik təsir göstərir.

Beləliklə, kobud qiymətləndirmə göstərir ki, baxılan giriş faktorlardan dağ süxurunda qumun konsentrasiyası gərilmənin möhkəmlik dərəcəsinə ən böyük təsir göstərir, dağ süxurunun

markası isə araşdırılan göstəriciyə heç bir təsir etmir (səpələnmə sıfıra bərabərdir) və sonrakı araşdırmalarda nəzərə alınmaya bilər.

İ. Kantın dediyi kimi, ağlabatan suallar qoymaq bacarığı ağlın və ya bacarığın vacib və zəruri əlamətidir. Aydındır ki, hər bir normal uşaq ətrafdakılara bir gündə orta hesabla 300 sual verir. Və çox vaxt onlara «ixtiyari suala ixtiyari cavab» prinsipinə əcasən cavab alır.

İ. Kant yazır ki, əgər sual mənasızdırsa və yararsız cavablar tələb edirsə, onda bu sual üçün utanmaqdan əlavə, bir də o məharətsiz dinləyicini axmaq cavablara sövq edir və qədimlərdə deyildiyi kimi, belə bir hadisəyə gətirib çıxarır: biri keçini sağır, o birisi altına xəlbir, şadara tutur. Anketləşdirmə, ekspertlərin sorğusu iqtisadiyyat və elmi-texniki tərəqqi ilə idarəetmədə böyük rol oynayır.

Razılaşmada, dəqiq desək, başqalarının fikirlərini nəzərə almaqla problemlərin həllinə yanaşmanın analizində anketkəşdirmədən necə istifadə etmək qaydasına aid misal göstərək.

12-ci misal. Bu misalda böyük qrup ixtisasçıların bu və ya digər faktorların neft istehsalına təsirində ümumi, kollektiv rəylərini aşkar etmək məqsədilə materiallar ümumiləşdirilmişdir. (Ş. Ç. Şeydayev).

10-cu cədvəl

Sıra nömrəsi	Ekspertlər (işlərin müəllifi)	Faktorlar						İnformasiya mənbəyi				
		mədən rejimi	kollektiv xassələr	qeyri-bircinslilik	neftin tökül. şərti	lay mayelərinin xas.	termodin. quyu şərtləri	quyu tempi	seçmə tempi	keçən su həcmi	yenidən işləmə müddəti	kapillyar keçiricil.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	Stolyarov E.V.	7,5	7,5	2	7,5	3	7,5	1	7,5	7,5	7,5	7,5
2	Kojakin S.V.	7,5	1	2	7,5	3	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5
3	Karnuşin V.Z. və başqa	8,5	4	5	2	1	8,5	3	8,5	8,5	8,5	8,5
4	Qomzikov V.K., Molotova N.A	8,5	2	4	6,5 5	1	3	8,5	8,5	8,5	8,5	8,5
5	Hagoort U.	6,5	1	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5	6,5
6	Məlik Aslanov L.S. və başqa	9	2	3	1	6	9	9	4	9	9	5
	Bütün müraciətlər üzrə ranqlar cəmi	1361,0	1150,5	1244,0	1308,5	1222,5	1394,5	1143,5	1267,5	1376,0	1390,5	1390,5
	Hər bir cəmin orta cəmdən fərqi (J) və ya meyli	–65,6	144,9	51,4	13,1	72,9	99,1	151,9	27,9	80,6	95,1	95,1
	Meyletmə kvadratı (d^2)	4303,4	20996,0	2642,0	171,6	5314,4	9820,8	23073,6	778,4	6496,4	9044,0	9044,8

Bunun üçün axırıncı on ildə aparılan araşdırmaların nəticələrindən istifadə etməklə ekspert sorğusu üsulu tətbiq edilmişdir. 93 iş üzrə materiallarin yığımı və sistemləşdirilməsindən sonra bir hissəsi 10-cu cədvəldə (sorğu cədvəli) təqdim edilən 11 geoloji-fiziki və texnoloji faktor ayrılmışdır.

10-cu cədvəldə daha çox əhəmiyyətli qiymət verilən faktorlara 1, 2, 3, . . . 11-ə qədər ranq verilmişdir. Belə ki, məsələn, I mənbədə (Stolyarov Y. B. və başqaları, HX, 1975, № 3) birinci yer «buruq toru» faktoru , II yer «layın, süxurun qeyri-bircinsliyi» faktoruna verilmiş, III yeri isə lay mayelərinin xassələri tutur. Qalan faktorlara əhəmiyyət verilmir, yəni qalan əlamətlər nəzərə alınmır və onlara ranqlar aşağıdakı qayda ilə verilir: (4+5+6+7+8+9+10+11)/8 = 7,5. Üçüncü hal üçün (informasiya mənbəyi: Karnuşin V. Z. və b. «Нефтепромысловая геология и геофизика », 1976, № 3) 5 faktora daha böyük əhəmiyyət verilir (lay mayelərinin xassələri, neftin tökülməsi şərtləri, buruq toru, layın qeyri-bircinsliyi və kollektor xassəsi), qalan əlamətlər isə aşağıdakı kimi ranqlaşır: (6+7+8+9+10+11)/8 = 8,5.

11-ci cədvəl

Mənbələr	Eyni ranqların sayı, P_i	Eyni ranqların nəzərə alınması əmsalı, t_j
1	8	504
2	8	504
3	6	210
4	6	210
5	10	990
6	5	120
və s.	$T = \Sigma t_j = 70308$	

11-ci cədvəldə

$$t_i = P^3 - P$$

düsturu ilə hesablanan eyni ranqların nəzərə alınması əmsalının köməkçi hesablanmasının nəticələri göstərilmişdir, burada P – eyni ranqların sayı, yəni nəzərə alınmayan faktorların sayıdır.

I mənbə üçün $P = 8$ və $t_i = 8^3 - 8 = 504$ alarıq.

W – uyğunlaşma əmsalı aşağıdakı düsturla hesablanmışdır.

$$W = \frac{12 \sum_{1}^{k} d^2}{m^2\left(k^3 - k\right) - T}$$

burada, k – baxılan faktorların sayı ($k = 11$),

m – eksperimentlərin sayı, bu halda baxılan işlərin sayı (= 95),

$[d]$ – ranq cəminin orta qiymətindən fərqi (10-cu cədvəl),

$T = \Sigma t_i$ – eyni ranqları nəzərə alan əmsaldır.

Beləliklə,

$$W = \frac{12}{59^2(11^3 - 11) - 70308}(4303{,}4 + 20996{,}0 +$$

$$+ 2642{,}0 + 171{,}6 + 5314{,}4 + 9820{,}8 + 23073{,}6 + 778{,}4 +$$

$$+ 6496{,}4 + 9044{,}0 + 9044{,}0) = 0{,}097.$$

Hesablanmış W = 0,097 qiyməti baxılan misalda alınan nəticələrin az dərəcədə uyuşması deməkdir.

Beləliklə, axırıncı illərdə aparılmış çoxlu miqdarda axtarışların nəticələrinə görə neftçıxarmaya bu və digər faktorların yüksək təsiri haqqında ümumi nəticə çıxarmaq mümkün deyildir.

Qeyd edilmiş uyğunsuzluqlar onunla izah olunur ki, müxtəlif məktəb və istiqamətlərin işləri analiz olunmuş, həm də xarici təcrübə nəzərə alınmışdır. Yeganə rəyin olmaması problemin mürəkkəbliyi, bəzi hallarda analiz vaxtı qeyri-kafi seçmələrdən istifadə edilməsi başqa hallarda «xalis» təcrübələrin qoyulması ilə izah olunur.

Bu misal bir daha göstərir ki, sorğuların anketləşdirilməsinə olduqca səliqəli yanaşılmalıdır və burada İ. Kantın yuxarıda qeyd edilmiş sözləri, yəni sorğuçuların, eləcə də anket düzəldənin mədəniyyəti böyük rol oynayır. Əvvəldə 1936-cı ildə ABŞ prezidenti F.Puzveltin seçilməsində telefon müraciətinin qeyri-düzgün anketləşdirilməsi misalı göstərilmişdir (4-cü misal). Az əhəmiyyəti olmayan başqa misal Fransanın ictimai fikir institutunun fəaliyyətini bəyənməyən general Ş. de Qolla əlaqədardır. İnstitutun direktoru, professor Jan Stelser belə danışır: Çevriliş referendumdan sonra 1945-ci ildə, müharibədən sonra ölkədə siyasi şərait həddən artıq mürəkkəb və dolaşıq olanda baş verir. İnstitut əməkdaşları ölkənin müxtəlif təbəqələrindən olan 2 min adamla apardıqları sorğuya ictimai fikri qabaqcadan tədqiq edirlər. Referenduma 2 həftə qalmış sorğunun nəticələri, onları ciddi şəkildə qəbul etməsə də Ş. de Qolla bildirildi. Lakin , çox keçmədi ki, Ş. de Qoll Jan Stelseri dəvət etdi və qabaqcadan xəbərvermə nəticələri təəccübləndiyini bildirdi. I sualda sorğu ilə qabaqcadan tədqiqatın nəticəsi 93%, referendum – 94%, II sualda isə tədqiqatın nəticəsi 67%, referendum isə 66% idi. «On milyonların fikrini bu cür dəqiqliklə qabaqcadan görmək» – fantaziyadır, – deyə Ş. de Qoll cavab verir.

12-ci misal. Hər hansı prosesin göstəricilərinə müxtəlif faktorların təsirini bu faktorun informativliyini hesablama yolu ilə təyin etmək olar.

Fərz edək ki, ümumi əlamətləri olan 2 proses vardır. Bu proseslər həmin əlamətə görə fərqlənirlərsə, onda o informativdir. Bu əlamət qeyri-informativ olduğu halda baxilan proseslərin arasındakı fərqi aşkara çıxartmaq mümkün olmur. İnformativliyi qiymətləndirmək üçün Kulbak ölçüsü tətbiq olunur.

115 obyekt üzrə neftverilmə əmsalları və bu obyektlərin işlənmə proseslərini xarakterizə edən faktorlar vardır:

1) S quyu toru sıxlığı, qa/quyu;

2) keçiricilik K, mD;

3) V_{sor} – məsamələrdən sorulmuş su miqdarı;

4) işləmə sürəti T;

5) neftdə qətran miqdarı C_{sm}, % çəki:

6) kollektorda gilin miqdarı C_t, % çəki.

Bütün obyektləri 2 qrupa bölürük: birinci qrupa η neftvermə əmsalı 0,4-dən kiçik olan obyektləri, ikinci qrupa isə neftvermə əmsalı η 0,4-dən böyük olanları daxil edirik. Deyilənlərə uyğun olaraq bu, A və B qrupları olacaqdır. Sonra bu 2 qrup üçün əlamətlərdə müxtəlifliyi aşağıdakı kimi axtarırıq:

0-la 450 arasında dəyişən əlamətlərdən birini – sorulmuş suyun miqdarını götürək. Verilmiş nizamlanmış sıranı 12 intervala bölək (12-ci cədvəl). 0-dan 50-yə, 50-dən 100-ə qədər və s. (8 – 12 intervala bölmək məsləhət görülür). Bu intervalları 12-ci cədvələ daxil edək (2-ci qrafa). Sonrakı 2 qrafada (3 və 4) A və B qruplarından olan mədən yataqlarının hər bir intervala düşmə tezliyinə aid verilənləri yerləşdiririk. A və B bütün diapazonlarda uyğun tezliklərin cəmini 10% qəbul edərək, 5 və 6 qrafaları nisbi tezliklərin qiymətləri ilə doldururuq. Məsələn,

0 – 50 intervalı üçün (24 : 41) 100 = 58 alırıq.

İntervalların sərhədlərinin seçilişinin nəticəyə təsirini minimuma endirmək üçün hər bir intervalda ölçülmüş sürüşkən (hamarlanmış) ortanın hesablanması üsulu ilə hər bir intervalda orta çəkili tezlik dərəcəsini təyin edirik. Bu zaman verilmiş əlamətlərin tezliyini 4 qonşu diapazonda nəzərə alırıq. Ölçülmüş dəyişən orta

$$y_3 = (y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + y_5) / 10$$

düsturu ilə hesablanır.

12-ci ədvəl

“Vsor–sorulmuş su miqdarı” əlaməti üçün informativliyin təyini

İntervalın №-si	İnterval	Qrupa düşmə tezliyi		Tezlik %				Xüsusiyyətlərinin uyğun nisbəti	DK	J hesab
				ehtimal		uyğunlaşmış				
		A	B	A	B	A	B	J_A/J_B		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
–1	–	0	0	0	0	6	2	–	–	–
0	–	0	0	0	0	14	7	–	–	–
1	0,0-50	24	18	58	24	28	16	1,92	3	0,18
2	50,1-100	9	19	22	25	23	18	1,28	1	0,03
3	100,1-150	3	10	7	13,5	15	15	1	0	0
4	150,1-200	3	4	7	5	7	10	0,7	–2	0,03
5	200,1-250	2	7	5	9	4	8	0,5	3–	0,06
6	250,1-300	0	5	0	7	2	7	0,49	–5	0,12
7	300,1-350	0	3	0	4	0,5	6	0,08	–11	0,30
8	350,1-400	0	6	0	8	0	5	0	0	0
9	400,1-450	0	3	0	3	0	3	0	0	0
		41	75	99	98,5	99,5	97	–	–	0,72

I intervalda hamar tezlik göstəricisini hesablamaq üçün bəzi fiktiv intervallara sıfır və minus 1 daxil edək. Bu intervallara heç bir müşahidə düşmədiyi üçün, bu diapazonlarda tezlik göstəriciləri sıfra bərabərdir:
$y_0 = y_{-1} = 0$. Onda I və II intervallarda A qrupu üçün hamar tezliyi belə hesablayırlar:

$$y_{1A} = (0 + 0 + 4y_1 + 2y_2 + y_3) : 10 = (0 + 0 + 4 \cdot 5b + 2 \cdot 22 + 7) : 10 = 2b$$

$$y_{2A} = (0 + 2y_1 + 4y_2 + 2y_3 + y_4) : 10 = 10 + 2 \cdot 58 + 4 \cdot 22 + 2 \cdot 7 + 7) : 10 = 23.$$

Sonrakı hesablamaları sadələşdirmək üçün qiyməti 5%-dən az olanlardan başqa hamar tezlik göstəricilərini faizlə 1-ə qədər dəqiqliklə yuvarlaqlaşdırırıq. Qiyməti 5%-dən az olan bütün tezlik göstəricilərini isə vergüldən sonra birinci rəqəmə qədər dəqiqliklə yuvarlaqlaşdırırıq. Cədvəlin sonrakı qrafasında hamar tezlik göstəricilərinin nisbəti y_A / y_B yazılır. Sonra diaqnostik əmsal qrafası gəlir. DK – hamar tezlik göstəriciləri nisbəti loqarifmasının 10-a hasilinin 1-ə qədər dəqiqliklə yuvarlaqlaşdırılmışdır:

$$DK = 10\lg\frac{\overline{y}_A}{\overline{y}_B}.$$

12-ci cədvəldə saxta intervallarda (sıfır və minus 1) hamar tezlik göstəriciləri meydana çıxdığından, orta ölçülü y_1 y_0 və y_{-1} kəmiyyətlərini cəmləmək və alınmış cəmi verilən əlamətlərin axırıncı diapazonda orta ölçülü tezlik dərəcəsi hesab etmək lazımdır. Buradan «sorulmuş su miqdarı» göstəricisi üçün I intervalda

$$\frac{\overline{y}_A}{\overline{y}_B} = \frac{48}{25} = 1{,}92; DK = 10\lg 1{,}92 = 3$$

alırıq.

12-ci cədvəlin sonuncu qrafasını verilən əlamətlərin hər bir intervalda informativliyinin qiymətləri ilə doldururuq. Kulbak formuluna görə J_1 – diapazonu- nun j-ci əlamətinin informativliyinin qiyməti

$$J\left(x_j^i\right) = DK\left(x_j^i\right)\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{x_j^i}{A}\right) - P\left(\frac{x_j^i}{B}\right)\right]$$

Burada $DK\left(x_j^i\right)$ əlamətinin i-ci diapazonunun diaqnostik əmsalı, $P\left(x_j^i / A\right)$ i-ci əlamətinin j-ci diapazonunun A qrupuna düşmə ehtimalıdır (hamar tezlik dərəcəsi), başqa sözlə y_{Ai} ilə işarə olunandır:

$$P\left(x_j^i / B\right) = \overline{y}_{Bi}$$

Diaqnostik cədvəli tərtib etmək üçün bütün intervallarda informativlik əlamətini hesablamaq və sonra bütün x_{j} əlamətlərinin onun diapazonlarının informativliyi cəminə bərabər olan informativliyini tapmaq lazımdır:

$$J\left(x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} J\left(x_j^i\right).$$

«Sorulmuş su miqdarı» göstəricisinin 1-ci intervalında (0–50) informativliyini hesablayırıq:

$$J = 3 \cdot \frac{1}{2}\left(0{,}28 - 0{,}16\right) = 0{,}18,$$

II-də (50–100):

$$J = 1 \cdot \frac{1}{2}\left(0{,}23 - 0{,}18\right) = 0{,}025$$

və s.

Bu əlamətin tam informativliyini J = 0,72 informativliklərin qiymətlərini cəmləmək yolu ilə tapırıq.

İnformativliyi 0,5-dən aşağı olan əlamətləri nəzərə almaq məsləhət görülür. Beləliklə, sorulmuş su həcmi informativ əlamətdir.

Qərar qəbul edərkən informasiyanın çatışmazlığı həyacanla tamamlanır (emosiya fransız dilindən tərcümə olunub, həyəcanlanma deməkdir). Bu, P. V. Simonovun informasiya nəzəriyyəsi olub

$$Э = П\,(И_н - И_и)$$

düsturu ilə verilir, burada $Э$ – həyəcanlanma, $П$ – tələbat, $И_н$ – zəruri informasiyadır, $И_и$ – olan informasiya tam informativdirsə, yəni $И_н = И_и$-dirsə, onda
$Э = 0$ olar.

Həyatda insan mütləq informativ sistemə çevrilə bilməz. Bəs doldurmaq nə deməkdir? Qida çatışmazlığını nə isə yeməli bir şeylə əvəz etmək olar, biliyin çatışmazlığını ancaq biliklə – «xüsusi tipli» yol ilə – doldurmaq olar.

Bu vəziyyət «Oğurlanmış məktub»dan götürülmüş parça ilə yaxşı illüstrasiya edilir: «Mən «cüt və tək» oyunu ilə hamını heyran qoyan bir səkkizyaşlı uşaq tanıyırdım – deyə Edqar P. O. yazır: Bu oyun çox asandır: oynayanlardan biri əlində kürəciklər gizlədir, o biri isə kürəciklərin cüt və ya tək olmasını tapmalıdır. Əgər taparsa, bir kürəcik alır, tapmırsa birini verir. Dediyim uşaq məktəbdə hamını udurdu. Onun həmkarlarının sadə müşahidəçilik və zəkalı qiymətləndirmə qabiliyyətinə əsaslanan tapma üsulu var idi. Məsələn, tutaq ki, onunla hər hansı bir sadəlövh oynayır, əlində kürəciyi sıxır və soruşur: «tək yoxsa cüt»? Oyunçu «tək» cavab verir və uduzur, lakin sonrakı oyunda udur, çünki o belə mühakimə yürüdür: sadəlövh birinci dəfə cüt götürdü, hiyləgərliyi ona bu dəfə ancaq tək götürməyə imkan verər və buna görə «tək» deməliyəm. O «tək» deyir və udur. Nisbətən ağıllı oyundaşla o belə mühakimə yürüdür: Birinci dəfə mən «tək» dedim, bunu yadda saxlayaraq o düşünəcək ki, birincidə olduğu kimi mən bu dəfə «cüt» deyəcəyəm və buna görə də «tək» götürməlidir. Lakin o dəqiqə fikirləşəcək ki, bu çox sadə hiylədir və «cüt» götürməyi qərara alacaq. Ona görə də «cüt» demək daha

yaxşıdır, «cüt» deyir və udur. Bəs yoldaşlarının «xoşbəxt» adlandırdığı məktəblinin oyununun mahiyyəti nədən ibarətdir?

Bu, sadəcə olaraq oyunçunun zehni inkişaf dərəcəsinin rəqibin zehni inkişaf dərəcəsilə eyniləşməsidir, dedim. Elədir deyə, Dyupen cavab verir və mən soruşanda ki, onun müvəffəqiyyətinin asılı olduğu tam eyniləşməyə o necə çatır, o cavabında deyir: mən bilmək istəyəndə ki, mənim rəqibim nə dərəcədə ağıllı və ya axmaq, xeyirxah, ya kinlidir və onda hansı fikirlər var, mən öz-özümə onun üzünün ifadəsini verməyə çalışıram, özüm həmin ifadəyə uyğun hansı fikir və ya hissiyyatlar yarandığını hiss edirəm.

Sonuncu – kifayət qədər informasiya olmayan şəraitdə, qərar qəbul etmək üçün emosiyalardan istifadə edilməsinə misaldır.

Nəzəriyyə və praktikanın çətin labirintlərində istiqamətlənməyə imkan verən yolgöstərici Ariadna ipi haqqında məsələlər çoxluğu həllinin (alqoritminin) ümumi üsulu barədə insanların arzusu məlumdur. Qədim yunanlar Ariadna haqda əfsanə yaratmışlar. Dedal Mesona minotavrı yerləşdirmək üçün dolaşıqlı və əyri-üyrü keçidli məşhur yeraltı bina tikmişdir. Bu labirintə düşən heç kəs oradan özü çıxa bilməmişdir. Tezey minotavrı öldürərək Ariadnanı iplə təmin edən Dedalın köməyi ilə labirintdən çıxmışdır.

12-ci b misalı. Çox dolaşıq yolları və otaqları olan hər bir binadan onun koridorundan iki dəfədən çox keçməmək şərtilə çıxmaq olar. Aşağıda göstərilən üç qaydanı verən yolları və çox otaqları olan binadan daha məqsədə uyğun çıxmaq yolunu fransız mühəndisi Tremo göstərmişdir.

1. Başlanğıc nöqtə və ya ayrıcdan ixtiyari seçilmiş istiqamətdə son nöqtəyə və ya yeni ayrıca çatana qədər getmək lazımdır. Birinci halda, yolun 2 dəfə qabağa və geriyə keçildiyindən divarda və ya döşəmədə ikili cizgilər çəkərək, geriyə qayıtmaq lazım gəlir. İkinci halda ayrıca giriş və ondan çıxışı hər dəfə qeyd edərək, yeni ixtiyari seçilmiş yolla irəli

getmək lazımdır. Təbiidir ki, bir neçə ayrıcdan sonra keçdiyimiz ayrıc rast gəlinməlidir. Burada 2-ci və 3-cü üsula uyğun 2 hal mümkündür.

2. Əgər yolayrıcına yeni yolla gəlmişiksə, geri qayıtmaq, giriş və ayrıcdan çıxışı iki cizgi ilə qeyd etmək lazımdır.

3. Ayrıca bir dəfə gedilmiş yolla yaxınlaşırsınızsa, yeni yol varsa onunla, yoxdursa ancaq bir dəfə gedilən yolla getmək lazımdır.

Beləliklə, bu üç qanuna riayət edərək, hər bir koridordan 2 dəfə keçmək şərtilə dolaşıqlı koridorları və çoxlu otaqları olan ən çətin binadan çıxmaq olar.

Buna misal üzərində baxaq. Fərz edək ki, əyri-üyrü yolları və çoxlu otaqları olan ABCDE binası – O mərkəzi ayrıcı olan beşbucaqlı verilmişdir, yəni O nöqtəsinə – AO, BO, CO, DO, EO yolları vardır. Gəzinti A nöqtəsindən başlanır, AO, OC, CD, DO-nu keçirik. 2-ci üsula görə D nöqtəsinə qayıdırıq. 3-cü üsula görə DE üzrə, sonra isə EO üzrə gedirik. Daha sonra E nöqtəsinə qayıdaraq EA üzrə A nöqtəsinə gedirik. Sonra AE, ED, DC, BO, OB, BA, AB, BC, CO, OA üzrə gedirik. Birkriteriyalı məsələyə gətirmək yolu ilə çoxkriteriyalı məsələlərin həlli mübahisəli situasiyalarda qəbul olan həllərin subyektivliyinin ciddi iz buraxdığı düz olmayan nəticələrə gətirib çıxarır. Məsələn, trener basketbolisti seçəndə bir tərəfdən uzun boy tələb olunur, digər tərəfdən uzun boy ən kiçik dinamikliyə uyğundur.

12-ci c misalı. Konkret misalla çoxkriteriyalı şəraitdə qiyməti müzakirə edək. Fərz edək ki, zəkalılığa, tənbəlliyə və soyuqqanlığa görə insanlar qiymətləndirilir. Zəkalılıq nə qədər çox olarsa, insan bir o qədər yaxşı olar; tənbəllik nə qədər çox olarsa, insan bir o qədər pis olar; soyuqqanlılıq nə qədər çoxdursa, insan bir o qədər pisdir. Fərz edək ki, biz 5 bal sistemində bu göstəriciləri ölçməyi öyrənmişik. Belə kriteriya təklif etmək olar:

$$R = \frac{N}{T + C}$$

burada N – intellekt (zəkalılıq)

T – tənbəllik

C – soyuqqanlılıqdır.

T və $C = 0$ olduqda hətta kiçik intellektdə belə insanın «keyfiyyətinin» sonsuzluğa bərabərliyi bu düsturun çatmayan cəhətidir. Bu çatışmazlığı aradan qaldırmaq üçün məxrəcə hər hansı bir A sabitini daxil edək, onda

$$R = \frac{N}{T + C + A}$$

alırıq. Fərz edək ki, 2 adamı qiymətləndirmək lazımdır

1. $N = 5$, $T = 1$, $C = 1$;
2. $N = 4$, $T = 0$, $C = 0$;

$A = 1$ qəbul etsək, onda I individium üçün $R_1 = 1\frac{2}{3}$, II üçün isə $R_2 = 4$ olar, yəni II individium I-dən yüksəkdir. $A = 10$ olarsa, onda I üçün $R_1 = 5/12$, II üçün isə $R_2 = 2/5$ olar, onda tərsinə alınır, yəni $(5/12 > 2/5)$.

Dərindən müzakirə etməyəcəyik. Başlıca budur ki, burada, A əmsalının seçilməsində subyektivizm aydın görünür.

Ayrı-ayrı kriteriyaların miqdarını qiymətləndirməklə mürəkkəbləşmiş çoxkriteriyalı problem düz üsullarla yanaşı, köməkçi metodlara istinad etməyi çox əhəmiyyətli hesab edir. Bütün qiymətlər diaqnostlaşdırma prinsipi əsasında aparılmalıdır. Burada aşağıdakı kimi analogiya aparmaq ağlabatandır.

Lord Blud ölmüşdür. Qapıçının təqsiri, günahı yoxdur və o, yaxşı atıcıdır. Bu, qapıçını günahlandırmaq üçün kifayət deyil. Bu ərəfədə Lord Blud qapıçınının qızını aldatmışdır. Bu da günahlandırma üçün kifayət deyildir. Lakin bunların hamısını birlikdə üstə gələndə nə isə bir şey qapıçını günahlandırmaq

üçün əsasdır. Bu, bioloqun fəlsəfəsi, müstəntiq və mühəndisin «ideologiyası», həkimliyin əsasıdır.

12-ci d misalı. Hazırda ölkədə fəaliyyətdə olan neft quyularından əlavə neft çıxarılmasını artırmaq və stabilləşdirmək məqsədilə əlavə quyular qazılması həyata keçirilir. Neftverən quyuların sayının artması neft miqdarını artırır ki, bu da, kapital qoyuluşunun artmasına gətirib çıxarır. Əsas məsələ neft çıxarılmasının ümumi səviyyəsinin məqsədəuyğun iqtisadidən aşağı düşməsinə yol verməkdən, həm də kifayət qədər məsrəflərə yol verən lazımsız əlavə quyuların qazılmasından imtina etməkdən ibarətdir.

Qeyd etdiyimiz məsələnin həlli üçün əsasında əlavə quyu qazılması ilə əlaqədar olaraq maksimal gəlir əldə olunmasının effektivliyi qiymətləndirilən bir sıra kriteriyalar analiz olunmuşdur. Bunun üçün dəniz neft mədənlərinin NKP lay dəstəsinin bloklarından birinin quyusunun faktik verilənlərindən istifadə olunmuşdur.

İşə başlanandan indiyə qədər bu blok üzrə 200 × 200 və 400 × 200 m quyu torunda qazılmış 75-ə qədər quyu istismara verilmişdir. Göstərilən obyekt üzrə bir qazılmış quyuya lazım olan sahə 10,62 ha-dır. Neft Daşlarında qazıntı işlərinin aparılması hazırda başa çatmaq mərhələsindədir və ayrı-ayrı obyektlərdə torların sıxlaşdırılması başlanır. Torların sıxlaşdırılması həm yeni quyuların qazılması, həm də aşağı horizontdakı quyuların fəaliyyətə qaytarılması hesabına aparılır.

Dənizdə neft quyularının qazılması və istismarı hidrotexniki quyuların qurulması ilə əlaqədardır ki, bu da hazırlanmanın iqtisadi göstəricisinə əhəmiyyətli dərəcədə təsir göstərir.

Verilmiş məsələnin həllində iqtisadi göstərici olaraq

$$K = (\Gamma - O)\, Q_{\text{n}} \qquad (1)$$

düsturu ilə təyin olunan istismar edilən quyuların gəliri istifadə olunmuşdur, burada:

Γ – 1t neftin qiyməti, man/t

O – 1t neftin ortaillik maya dəyəri, man/t
Q – verilmiş quyudan bütün istismar müddətində çıxarılan neftdir.

Neft istismarının maya dəyərini təyin etmək üçün Sov.İKP XXII qurultayı adına NQÇİ-nin 1981-ci ildəki faktik verilənlərdən istifadə olunmuşdur. Maya dəyərinin kalkulyasiyası quyunun amortizasiyası nəzərə alınmadan onun fondundan asılı olan şərti – sabit xərclərə (əmək haqqı, quyu ləvazimatlarının cari təmiri, sex xərcləri), çıxarılan mayenin miqdarından asılı olan şərti dəyişən məsrəflərə (plastın neftverməsinin artmasından, mədən hazırlığından, neftin çəkib vurulmasından və saxlanılmasından) və istismar üsuluna (energetik, quyu avadanlıqlarının amortizasiyası, yeraltı təmir) bölünür.

13-ci cədvəl

	0	5	10	15	20	25	30
5	–300	2653	2653	2653	2653	2653	2653
10	–832	2353	4302	4302	4302	4302	4302
15	–1552	1821	4003	7636	7636	7636	7636
20	–1552	1100	3470	7336	12850	12869	12869
25	–1552	1100	2750	6804	12570	13676	13676
30	–1552	1100	2750	6083	12038	13676	13805

Quyuların amortizasiyasının hazırlanması üçün bu quyuların balans dəyərindən istifadə olunmuşdur.

Bu hesablamaların əsasında dəyəri nisbi vahidlərlə verilən 13-cü cədvəl tərtib edilmişdir.

Cədvəldə qazılmış quyuların sayından, normal işləyən və iqtisadi səmərəsi olan quyulardan asılı olaraq ümumi gəlir verilir. 13-cü cədvələ görə baxılan obyektdən qalıq ehtiyatını çıxarmaq üçün 30 quyu qazımaq kifayətdir. Lakin NKP lay dəstəsinin bu tədqiqatının analizi göstərir ki, (13-cü cədvəldəki rəqəmlərdən göründüyü kimi) qazılmış quyuların arasında

iqtisadi cəhətdən səmərəsizləri də var. (1) formuluna əsasən iqtisadi səmərənin təyinində həmin quyular itki verir və yataqların tədqiqinə mənfi təsir edir. Torların sıxlaşdırılması üçün 30 quyunun hamısının qazılması zəruridirmi? Cavab üçün aşağıda göstərilən əlamətlərin tətbiq edilməsinin nəticələrini analiz edək və iqtisadi gəliri ən böyük olan quyuların optimal sayını təyin edək.

Laplas əlaməti. Bu əlamətə əsasən torların sıxışdırılması üçün qazılmış quyulardan gələn gəlirin orta qiymətinin ehtimalı bərabər ehtimallar qanununu ödəməlidir. Beləliklə, *n*-nin müxtəlif qiymətlərinə (0,5, 10, 15, 20, 25, 30) $\frac{1}{7}$ - ə bərabər ehtimalı yazmaq olar. Bu hala uyğun qiymətlər üçün ehtimal gəlirini tapırıq:

N = 5	2231
N = 10	3290
N = 15	4973
N = 20	6995
N = 25	7003
N = 30	6800

Göründüyü kimi, bu kriteriyaya əsasən quyu torlarını sıxlaşdırmaq üçün N = 25 quyu qazılmalıdır. Belə ki, ancaq qiymətə ən böyük gəlir – 7003 uyğun gəlir.

Vald kriteriyası. Vald kriteriyasına əsasən cədvəlin hər bir sətrindən ən kiçik qiymət tapılır və bu ədədlərdən ən böyüyünə uyğun olan sətir seçilir. Verilən halda, alırıq:

N = 5	– 300
N = 10	– 832
N = 15	– 1552
N = 20	– 1552
N = 25	– 1552
N = 30	– 1552

Alınmış nəticələrə görə quyuların miqdarını N = 5 seçmək lazımdır. Quyuların sayının N = 5 götürülməsi ola bilsin ki, 300-ü aşmayan itki verə bilər. Lakin bu kriteriya pessimistikdir və verilmiş məsələyə tətbiq oluna bilmir. Vald kriteriyası hazırlanmış torların sıxlaşdırılması üçün əlavə quyu qazılmasını məhdudlaşdırır ki, bu da yuxarıda deyilənlərə ziddir.

Qurvis kriteriyası. Fikirləşmədən ən kiçik gəlir seçmək və ən böyük gəliri nəzərə almamağı ağlabatan hesab edən Qurvis kriteriyası aşağıdakı şəkildədir:

$$H = KA + (1 - k)\,a, \qquad (2)$$

burada A – verilmiş sətirdə ən böyük ədəd,
a – ən kiçik ədəd,
k – optimizm əmsalıdır.

Qurvis kriteriyasının analizi göstərir ki, k = 0 olduqda bu kriteriya Vald pessimistik kriteriyasına çevrilir, lakin k = 1 olduqda mütləq optimizm kriteriyası alınır. Bu kriteriyaya əsasən optimizm əmsalının qiymətləri k olaraq 0,1; 0,26; 0,5 götürərək, hər bir sətir üçün H-ın qiymətlərini hesablayırıq və H-ın ən böyük qiymət

14-ci cədvəl

N \ K	0,1	0,2	0,5	0,8	0,9
5	–4	291	7166	2062	2358
10	–318	195	1735	3276	3789
15	–634	285	3041	5798	6717
20	–110	1332	5688	9985	11427
25	–30	1493	6062	10631	12153
30	–17	1519	6126	10734	12269

aldığı sətiri seçirik. Bu cür hesablamanın nəticələri 14-cü cədvəldə göstərilmişdir.

14-cü cədvəlin verilənlərinə görə, optimizm əmsalının k = 0,1 qiymətində quyu miqdarını N = 5 k-nın (0,2, 0,5, 0,6, 0,9) kimi digər qiymətlərində N = 30 seçmək lazımdır.

Sevinc kriteriyası. Bu kriteriyaya görə *n*-in hər bir qiyməti daha əhəmiyyətli hal, başqa sözlə, ən böyük qiymət tapılır, bu hala uyğun sütunun bütün elementlərindən

15-ci cədvəl

N/N	0	5	10	15	20	25	30
5	0	0	–1649	–4983	10216	11023	11152
10	–532	–300	0	–3550	–8784	–9591	–9720
15	–1253	–832	0	0	0	–6041	–6170
20	–1253	–832	–300	–526	–526	–807	–936
25	–1253	–832	–832	–963	–863	0	–129
30	–1253	–832	–1553	–1553	–1243	–526	0

.

uyğun qiymətlər çıxarılır. Verilən halda 300-ü $n = 0$ sütunundan, 2653-ü $n = 5$ sütunundan, 4302-ni $n = 10$ sütunundan və s. çıxmaq lazımdır.

Alınmış nəticələr 15-ci cədvəldə göstərilmişdir.

15-ci cədvəldə verilənlərə əsasən hər bir sətir üçün minimal qiymət uyğun olaraq aşağıdakılara bərabərdir:

N = 5	– 11152
N = 10	– 9720
N = 15	– 6170
N = 20	– 1253
N = 25	– 1553
N = 30	– 1553

Bu kriteriyaya əsasən ən çox gəlir əldə etmək üçün quyuların sayı N = 20 olmalıdır.

Beləliklə, biz aşağıdakı müxtəlif həllər arasında quyu torlarının sıxlığı üçün optimal quyu miqdarı seçirik: Laplas kriteriyasına əsasən 25 quyu; Vald kriteriyasına əsasən 5 quyu; optimizm əmsalının qiymətindən asılı olaraq Qurvis kriteriyasına görə 5 və ya 30 quyu qazılmalıdır; Sevinc kriteriyasına əsasən N = 20 götürmək lazımdır.

Göründüyü kimi, bu cür qeyri-müəyyən şərtlərdə kriteriyanı seçmək çətindir, çünki hər bir həlldə quyuların sayları müxtəlif alınır.

Beləliklə, göstərilmiş kriteriyalar setkaların sıxlaşdırılması üçün optimal quyuların optimal miqdarını seçməyə imkan vermir. Yuxarıda göstərilən qeyri-müəyyən şərtlərdən ən optimal variantı seçmək üçün mədənlərin istismarı və yataqların tədqiqindən alınan həqiqi məlumatlar əsasında hər bir tələbatın ehtimalını və beləliklə hər bir fərziyyədə gəlirin riyazi gözləməsini təyin etmək olar.

Hər bir tələbat üçün ehtimalın qiyməti 16-cı cədvəldə göstərilmişdir.

16-ci cədvəl

Tələbat	0	5	10	15	20	25	30
Ehtimal	0,01	0,17	0,14	0,16	0,21	0,17	0,14

16-cı cədvəldəki məlumatlardan istifadə edərək, hər bir fərziyyədə əlavə quyulardan alınan gəlirin riyazi gözləməsi hesablanır.

$$N = 5 \quad \Sigma \quad (5) = -300 \cdot 0{,}01 + 2653\,(0{,}17 + 0{,}16 + 0{,}21 + 0{,}17, + 0{,}14) = 2623$$

$N = 10 \quad \Sigma(10) = -832 \cdot 0{,}01 + 2353 \cdot 0{,}17 + 4302\,(0{,}14 + 0{,}16 + 0{,}21 + 0{,}17 + 0{,}14) = 3920$

$N = 15 \quad \Sigma(15) = -1552 \cdot 0{,}01 + 1921 \cdot 0{,}17 + 4303 \cdot 0{,}14 + 7636\,(0{,}16 + 0{,}21 + 0{,}17 + 0{,}14) = 6047$

$N = 20 \quad \Sigma(20) = -1552 \cdot 0{,}01 + 1100 \cdot 0{,}17 + 3470 \cdot 0{,}14 + 7336 \cdot 0{,}16 + 12869\,(0{,}21 + 0{,}17 + 0{,}14) = 8523$

$N = 25 \quad \Sigma(25) = -1552 \cdot 0{,}01 + 1100 \cdot 0{,}17 + 2750 \cdot 0{,}14 + 6804 \cdot 0{,}16 + 12570 \cdot 0{,}21 + 13676\,(0{,}17 + 0{,}14) = 8525$

$N = 30 \quad \Sigma(30) = -1552 \cdot 0{,}01 + 1100 \cdot 0{,}17 + 2750 \cdot 0{,}14 + 6083 \cdot 0{,}16 + 12038 \cdot 0{,}21 + 13676 \cdot 0{,}17 + 13805 \cdot 0{,}14 = 8380$

Alınmış riyazi gözləmələrdən göründüyü kimi, quyuların miqdarından asılı ən böyük gəlir $N = 25$ sayına uyğun gəlir.

Məlumdur ki, kifayət qədər dəqiq informasiya olmadıqda seçmə üsullarından biri müvəffəqiyyət şanslarının hesablanmasıdır. Bu məqsədlə:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \qquad (3)$$

asılılığından istifadə edək, burada α – pis nəticələrin alınması ehtimalı, γ – tam müvəffəqiyyət ehtimalı, β – aralıq hal ehtimalıdır.

Bu şərtlər daxilində əlverişlı olmayan ΣS_1 nəticəyə uyğun gəlirlərin cəmini n_1 ilə, aralıq nəticələrə uyğun gəlirlərin cəmini ΣS_2 ilə, n_2 ilə isə əlverişli ΣS_3 nəticəsinə uyğun gəlirin cəmini işarə etsək, riyazi gözləmənin ortaçəkili qiymətini alarıq:

$$E = \alpha \frac{\Sigma S_1}{n_1} + \beta \frac{\Sigma S_2}{n_2} + \gamma \frac{\Sigma S_3}{n_3}. \qquad (4)$$

Bu halda əsas məsələ hər bir nəticənin hansı kateqoriyaya aid olduğunu təyin etməkdir.

Misal üçün $\alpha = 0{,}1$; $\gamma = 0{,}2$ və beləliklə $\beta = 0{,}7$ götürərək əlverişli hal, başqa sözlə əlavə quyu miqdarından

asılı olaraq ən maksimal gəlir təyin olunur. Maksimal gəlirə uyğun quyuların miqdarı optimal qəbul olunur:

$$E(5)=\frac{-300}{11}\cdot 0{,}1+\frac{2653\cdot 5}{5}\cdot 0{,}7+\frac{2653}{1}\cdot 0{,}2=2358$$

$$E(10)=\frac{-832}{1}\cdot 0{,}1+\frac{2353+4302\cdot 4}{5}\cdot 0{,}7+\frac{4302}{1}\cdot 0{,}2=3516$$

$$E(15)=\frac{-1552}{1}\cdot 0{,}1+\frac{1821+4003+7636\cdot 3}{5}\cdot 0{,}7+$$

$$+\frac{7636}{1}\cdot 0{,}2=5394$$

$$E(20)=\frac{-1552}{1}\cdot 0{,}1+\frac{1100+3470+7336+12869\cdot 2}{5}\times$$

$$\times 0{,}7+\frac{12869}{1}\cdot 0{,}2=7689$$

$$E(25)=\frac{-1552}{1}\cdot 0{,}1+\frac{1100+2750+6309+12570+13676}{5}\times$$

$$\times 0{,}7+\frac{13676}{1}\cdot 0{,}2=7677$$

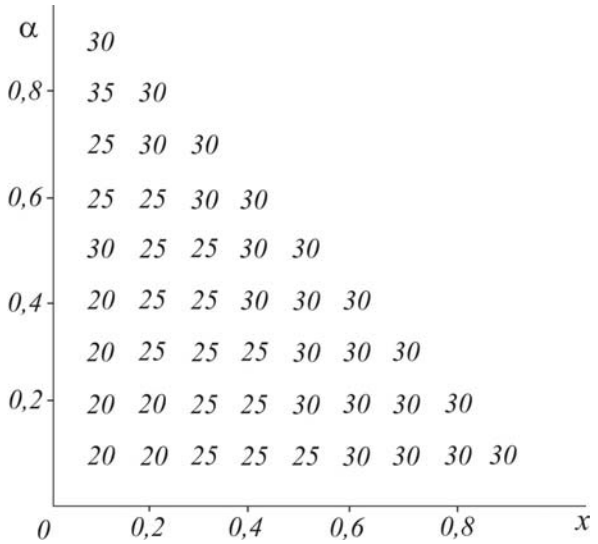
$$E(30)=\frac{-1552}{1}\cdot 0{,}1+\frac{1100+2750+6083+12038+13377}{5}\times$$

$$\times 0{,}7+\frac{13805}{1}\cdot 0{,}2=7552$$

Alınmış qiymətlərdən görünür ki, ən maksimal gəlirə (7689) quyu miqdarı $N=30$ uyğundur.

Beləliklə, α – pessimizm və γ – optimizm əmsallarının qiymətini 0-dan 1-ə qədər dəyişməklə maksimal gəlirin təyin edilməsinin – γ-nın α-dan asılı bütün variantları hesablanmışdır (7-ci şəkil). Göstərilmiş şəkil pessimizm və optimizm əmsallarının qiymətlərindən asılı olaraq tor sıxlığı

üçün optimal sayda quyu qazılmasının daha əhəmiyyətli həllini əks etdirir.



7-ci şəkil.

Quyuların qazılmasında bir çox texnoloji əməliyyat və proseslər aparılır ki, bunların müvəffəqiyyətlə tətbiqindən quyu inşaatının keyfiyyətliliyi və səmərəliliyi asılıdır. Bununla əlaqədar olaraq qazma işlərində çoxkriteriyalı məsələlərin qoyuluş və formalaşması zəruridir.

Ştanq nasoslarının işində optimal rejimin seçilməsində bir sıra obyektiv və subyektiv faktorların təsirindən vahid məqsəd funksiyasını həmişə, məsələn, maksimal gəlir şəklində vermək olmur. Bu halda əsas tələb olunan şərtlər aşağıdakı kimi ifadə olunur: a) quyu debitini artırmaq; b) quyuların təmirarası dövrünün orta vaxtını artırmaq.

Qeyd etmək lazımdır ki, bu tələblər bir-birinə ziddir, belə ki, quyu debitinin artırılması nasosun daha tez sıradan çıxmasına səbəb olur. Nə birinci, nə də ikinci şərtlər daxilində

seçilmiş texnoloji parametrlərin dəqiq qiymətlərini və ya onlar üzərində qoyulan məhdudiyyətləri göstərmək mümkün olmur. Odur ki, «a» və «b»
şərtlərinə qeyri-müəyyən məqsəd kimi baxmaq məqsədəuyğundur.

Çoxkriteriyalı məsələlərin həllində mürəkkəb və qeyri-müəyyən şərtlərdə qərar qəbul etmək üçün qeyri-müəyyən çoxluqlar nəzəriyyəsinin metodlarından istifadə oluna bilər.

R. Belman və L. Zade tərəfindən işlənilmiş qeyri-müəyyən çoxluqlar nəzəriyyəsinə görə əsas etibarilə mürəkkəb və qeyri-müəyyən sistemlərinin ümumi qəbul edilmiş miqdarı metodlarından imtina etmək nəzərdə tutulur.

Bu nəzəriyyənin əsas tezisi – qeyri-uyğunluq prinsipi – ondan ibarətdir ki, analizin adi kəmiyyət metodları mürəkkəb və qeyri-mürəkkəb sistemlər üçün kifayət deyil, belə ki, sistem nə qədər mürəkkəb olarsa, biz onun tətbiqi haqqında bir o qədər az dəqiq və eyni zamanda praktiki qiyməti olan mülahizə yürütməyə qadirik.

Qeyri-müəyyən çoxluqların tərifi aşağıdakı şəkildə verilir. Fərz edək ki, $X = \{x\}$ – x ilə işarə olunan obyektlər (nöqtələr) külliyyatıdır. Onda x-də A qeyri-müəyyən çoxluğu aşağıdakı nizamlanmış cütlər çoxluğudur:

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{x},\ \mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x})\}, \quad \mathrm{x} \in X,$$

burada $\mu_A(x)$ x-in A-ya daxil olması funksiyasıdır. Daxilolma funksiyasına [0,1] intervalı uyğundur, belə ki, 0 və 1 uyğun olaraq aşağı və yuxarı daxilolma dərəcələrini ifadə edir.

Beləliklə, qeyri-müəyyən A çoxluğu, onun sərhəddinin qeyri-dəqiq olmasına baxmayaraq, hər bir x obyektinə onun A-ya daxilolma dərəcəsini təyin edən və (0,1) intervalındakı bir ədədin qarşı qoyulması yolu ilə müəyyən oluna bilər.

İki A və B qeyri-müəyyən çoxluqların kəsişməsi $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ kimi işarə olunur və həm A-ya, həm də B-yə daxil olan ən

böyük qeyri-müəyyən çoxluq kimi təyin edilir. Daxilolma funksiyası aşağıdakı bərabərliklə təyin olunur:

$$\eta_{A\cap B}(x) = \min(\eta_A(x), \mu_B(x)), \quad x \in X$$

Əgər min simvolu əvəzinə konyuksiya işarəsindən istifadə etsək, onda bu şərti belə də yaza bilərik:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \Lambda \mu_B(x)$$

Qeyri-müəyyən çoxluqlar nəzəriyyəsində qərar qəbul edən prosesin əsas elementləri aşağıdakılardır: qeyri-müəyyən məqsəd (*G*); qeyri-müəyyən məhdudluq *C*; qeyri-müəyyən həll *D*; $\mu(x)$ daxilolma funksiyası.

G və C –nın kəsişməsindən əmələ gələn qeyri-müəyyən D çoxluğu həll adlanır və aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$\mu_D(x) = \mu_G(x) \Lambda \mu_C(x)$$

X fəzasında $\eta_D(x)$ funksiyasına maksimum verən alternativ optimal həlldir.

Qeyd etmək lazımdır ki, praktik məsələlərin həllində daxilolma funksiyası bir neçə dayaq nöqtəsində bu funksiya haqqındakı informasiyaya əsaslanaraq və ya axtarış prosesinin əsasında təyin olunmalıdır.

Məsələn, tutaq ki, daxilolma funksiyası mexaniki sürət üçün qurulur. Aydındır ki, bu zaman aşağı daxilolma (0,1) sürətin minimal qiymətinə, yüksək daxilolma (0,9) maksimuma , orta daxilolma isə (0,5) ədədi orta, orta çəkiliyə ayırd edilir. Əgər daxilolma funksiyası məhlul sıxlığı üçün qurulursa, onda məhlulun minimal sıxlığı neft-qaz yaranması, maksimal sıxlığın isə layın hidravlik kəsikliyinə səbəb olduğunu nəzərə alsaq, həmin nöqtələrdə daxilolma funksiyasının qiyməti olaraq aşağı daxilolmanı (0,1) götürmək özünü doğruldar. Yəqin ki, yüksək daxilolmanı sıxlığın orta qiymətinə ayırd etmək lazımdır və s.

Qazma praktikasının bəzi qeyri-müəyyən çoxluqlar nəzəriyyəsinin tətbiqi əsasında məsələlərin həll olunmasının mümkün olmasına baxaq.

12-ci e misalı. Qazmada təqvim vaxtının balansı texnika və texnologiya səviyyəsi, qazma müəssisələrində işin təşkili haqqında kifayət qədər informasiya verir. Təqvim vaxtı balansının elementləri qazmanın əsas göstəricisinin əsas qiymətlərinə – kommersiya dəyərinə və quyunun 1 metrinin qazılması dəyərinə birbaşa təsir göstərir. Bu göstəricilərə quyunun dərinliyi və s. kimi başqa faktorlar da təsir göstərir.

Qeyri-müəyyən çoxluqlar nəzəriyyəsindən istifadə etməkl, ikikriteriyalı məsələnin həllinə baxaq.

17-ci cədvəl

Göstəricilər	Minimal	Orta	Maksimal
υ_{kom}	156	784	1412
$\mu_{ğ}$	0,1	0,5	0,9
c	63	272,5	482
$\mu_c(c)$	0,9	0,5	0,1

Bunun üçün kommersiya sürəti υ_{kom} /m/st.ay/1m, qazma dəyəri s/man və kəşfiyyat qazma vaxtı (17-ci cədvəl) kimi verilənləri analiz etmək və (x_1) – köməkçi işlərə, (x_2) – qəza və çətinliklərin aradan qaldırılmasına, (x_3) – təşkilati işlərə, (x_4) – mexaniki qazmaya, (x_5) – dərinliyə keçidə sərf olunan vaxtları, υ_{kom} optimallaşdırma kəmiyyətini və c təyin etmək lazımdır.

Cədvəldə qazma üçün köməkçi işlərə , qəza və çətinliklərin aradan qaldırılmasına, təşkilati işlərə və mexaniki qazmaya sərf olunan vaxt haqqında məlumat mədənin hər 1000m quyu dərinliyi üçün verilmişdir.

18-ci cədvəldən υ_{kom} və c-nin daxilolma funksiyasının qiymətlərinə uyğun minimal orta və maksimal qiymətləri təyin edilir. Bu qiymətlər 17-ci cədvələ köçürülmüşdür.

$\mu_v(\upsilon_{kom})$ və $\mu_C(c)$ daxilolma funksiyaları adətən

$$\mu(x) = 1 - \frac{1}{k_1 x + k_2} \qquad (1)$$

şəklində qurulur.

υ_{kom} –un 156-dan 784-ə qədər dəyişmə intervalına baxaq (1)-də x = 156 və x = 784-ü uyğun olaraq μ = 0,1 və 0,5 götürsək

$$0{,}1 = 1 - \frac{1}{156k_1 + k_2}$$

$$0{,}5 = 1 - \frac{1}{784k_1 + k_2},$$

və ya

$$140{,}4\ k_1 + 0{,}9\ k_2 = 1$$
$$392\ k_1 + 0{,}5\ k_2 = 1$$

alarıq.

Sistemi həll etsək,

$$k_1 = 0{,}001415 \quad \text{və} \quad k_2 = 0{,}2903\ 04$$

17-ci cədvəlin verilənlərindən istifadə edərək υ_{kom} və c üçün daxilolma funksiyasının göstərilən üsulla aşağıdakı qiymətlərini hesablayırıq

$$\mu_v(\upsilon_{kom}) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{0{,}00145\,\upsilon_{kom} - 0{,}290304}, & 156 \le \upsilon_{kom} \le 784; \\ 1 - \dfrac{1}{0{,}012739\,\upsilon_{kom} - 7{,}989}, & 784 \le \upsilon_{kom} \le 1412 \end{cases} \qquad (2)$$

18-ci cədvəl

	σ_{kom}	c	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\mu_\sigma(\sigma_{kom})$	$\mu_c(c)$	μ_d
1	692	97,39	222	153	98	153	13,9	0,465	0,885	0,465
2	458	159,63	451	265	145	183	13,6	0,465	0,842	0,350
3	589	130,04	327	200	159	115	13,4	0,350	0,866	0,420
4	622	62,80	293	184	206	108	18,8	0,420	0,900	0,453
5	462	124,47	409	178	362	161	14,2	0,352	0,762	0,352
6	209	225,49	792	571	533	430	24,0	0,157	0,737	0,157
7	277	170,62	703	352	308	465	25,1	0,220	0,830	0,220
8	397	125,83	420	226	202	376	11,6	0,311	0,868	0,311
9	277	244,10	613	480	401	278	9,8	0,220	0,675	0,220
10	261	207,70	567	304	225	626	15,8	0,206	0,778	0,206
11	179	314,30	1317	349	558	365	26,7	0,126	0,452	0,126
12	200	372,80	838	916	584	488	25,9	0,148	0,363	0,148
13	254	308,50	762	482	882	254	23,2	0,201	0,459	0,201
14	586	200,00	459	88	70	177	14,4	0,418	0,790	0,418
15	274	235,10	684	438	376	430	10,6	0,218	0,708	0,218
16	302	206,60	465	305	368	474	14,3	0,240	0,779	0,240
17	263	211,40	639	423	524	460	25,7	0,208	0,769	0,208
18	725	121,60	–	147	91	163	14,5	0,478	0,871	0,478
19	526	179,00	397	242	91	212	14,5	0,388	0,820	0,388
20	717	132,50	294	78	126	118	13,7	0,475	0,864	0,475
21	510	187,00	294	173	398	139	18,4	0,380	0,809	0,380
22	373	370,50	338	316	225	290	13,6	0,295	0,367	0,295
23	156	385,70	582	901	582	475	21,8	0,100	0,342	0,100
24	365	197,10	487	167	297	367	29,1	0,289	0,795	0,289
25	320	226,30	546	286	238	457	23,7	0,265	0,734	0,255
26	721	114,80	252	99	101	202	15,5	0,477	0,875	0,477
27	568	167,00	364	210	78	216	15,5	0,410	0,834	0,470
28	672	141,00	310	88	127	144	13,1	0,457	0,848	0,457
29	529	169,40	327	332	242	130	20,6	0,390	0,832	0,390
30	384	370,40	576	233	355	254	16,1	0,303	0,371	0,303
31	257	482,00	714	440	407	445	14,7	0,203	0,100	0,100
32	184	359,40	918	728	569	451	23,8	0,131	0,367	0,131
33	368	191,20	443	319	218	400	31,6	0,291	0,804	0,291
34	296	255,60	600	331	300	490	23,7	0,236	0,621	0,236
35	452	185,70	433	186	196	264	32,5	0,346	0,812	0,346
36	324	238,40	535	355	277	287	16,6	0,259	0,697	0,259
37	1412	339,80	657	726	354	342	16,3	0,900	0,415	0,415
38	167	339,00	685	495	834	831	14,9	0,113	0,415	0,113
39	383	226,40	603	215	228	374	31,5	0,390	0,734	0,390
40	201	396,90	820	745	826	441	29,5	0,149	0,320	0,149
41	306	374,70	687	362	443	306	27,1	0,244	0,363	0,244
42	353	297,80	640	269	224	309	23,2	0,281	0,471	0,281
43	237	306,00	597	634	440	609	17,3	0,462	0,184	0,184
44	286	251,20	523	202	555	480	15,4	0,228	0,644	0,228
45	254	252,90	483	674	353	616	21,8	0,200	0,635	0,200

$$\mu c=\begin{cases}1-\dfrac{1}{12{,}406-0{,}38186c}, & 63\le c\le 272{,}5;\\[2ex] 1-\dfrac{1}{3{,}156-0{,}004242c}, & 272{,}5\le c\le 482;\end{cases} \qquad (3)$$

18-ci cədvəldə bütün verilənlər üçün $\mu_v(\upsilon_{kom})$ və $\mu_c(c)$-nin (2) və (3) düsturu ilə hesablanmış qiymətləri göstərilmişdir. Bu cədvəlin axırıncı qrafasında daxilolma funksiyasının $\mu_v(\upsilon_{kom})$ və $\mu_c(c)$ qiymətlərinin ən kiçiyi yazılmışdır.

(1) düsturuna əsasən baxılan məsələnin həlli daxilolma funksiyasının 0,478-ə bərabər qiymətində alınır. Daxilolma funksiyasının bu kəmiyyətinə aşağıdakı qiymət uyğundur:
x_1 = 233 *c*., x_2 = 147 *c*., x_3 = 91 *c*., x_4 =263 *c*., x_5 = 15,4 m. olduqda

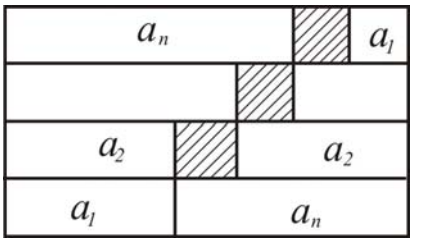
υ_{kom} = 725 m / st. ay $\qquad c$ = 121,6 man.

Riyaziyyatın öyrədilməsilə inkişaf etdirilən digər keyfiyyətə keçək. Bu, eyni bir düsturla müxtəlif cəhətdən məsələn, həndəsi və cəbri nöqteyi-nəzərdən baxmaq qabiliyyətidir.

U. U. Soye qeyd edir ki, eyni bir məsələni müxtəlif üsullarla həll etsək, müqayisə yolu ilə bu üsullardan hansının qısa və effektiv olmasını aydınlaşdırmaq olar. Qeyd edilən, təcrübəni təkmilləşdirir.

13-cü misal. Həndəsi nöqteyi-nəzərdən ədədi ardıcıllığın *n* həddi cəminin tapılmasına baxaq.

Birinci həddi (a_1) düzbucaqlısı şəklində, ikincini də (a_2) və s. kimi təsvir edək. Aşağı yönəlmiş nərdivan alınacaq (8-ci şəkil). Cəmi tapmaq üçün sahəni bilmək



8-ci şəkil.

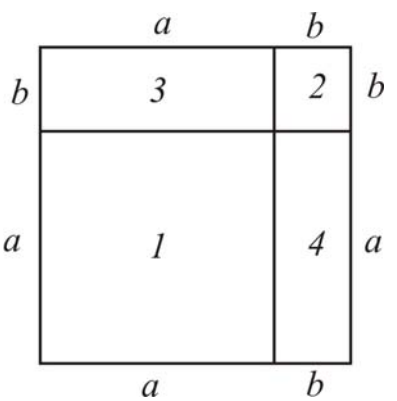
zəruridir. Pillələrin hündürlüyü həllərin sayına bərabərdir. İki nərdivanın birləşməsindən oturacağı $a_1 + a_n$-ə, hündürlüyü isə həddlərin sayına bərabər olan düzbucaqlı alınır.

Düzbucaqlının sahəsi $S = (a_1 + a_2) \cdot n$-ə bərabərdir. Ədədi silsilənin hədləri cəmi isə düzbucaqlı sahənin yarısına bərabərdir.

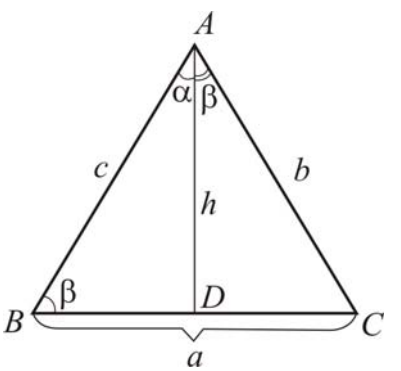
$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Ştrixlənmiş hissə ədədi silsilənin fərqidir.

14-cü misal. $(a + b^2)$ düsturu həndəsi interpretasiyasını



9-cu şəkil



10-cu şəkil

verək. Tərəfi $(a+b)$ olan kvadrat quraq (9-cu şəkil). Bu kvadrat tərəfləri a və b olan 2 düzbucaqlıya bölünür.

Kvadratın sahəsi $(a+b)$ onu əmələ gətirən fiqurların sahələri cəminə bərabərdir.

$$S=(a+b)^2=a^2+b^2+[ab+ab]=a^2+2ab+b^2.$$

Nə üçün a-nın 2-ci dərəcədən qüvvəti a-nın kvadratı adlanır? Çünki, biz tərəfi a olan kvadrat götürsək, onun sahəsi $a\cdot a=a^2$ olar ki, bu da a-nın 2-ci dərəcədən qüvvətidir, belə ki, a kvadrata yüksəldilmişdir. Buna görə də a^2-nı a-nın kvadratı adlandırırlar.

Analoji olaraq a-nın kubunu (a^3) izah etmək olar.

15-ci misal. Yuxarıdakı üsuldan istifadə edərək, 2 bucaq cəminin sinusu düsturunu çıxaraq.

α və β kimi 2 bucaq götürək və onlar üzərində üçbucağı elə quraq ki, AD xətti BC xəttinə perpendikulyar olsun (10-cu şəkil).

ABC üçbucağının sahəsi ABD və ADC üçbucaqlarının sahələri cəminə bərabərdir:

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ADC}.$$

Məlumdur ki, üçbucağın sahəsi onun 2 tərəfi ilə bu tərəflər arasında qalan bucağın sinus hasilinin yarısına bərabərdir.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\ cb\ \sin(\alpha+\beta),$$

$$S_{\Delta ABD}=\frac{1}{2}\ ch\ \sin\alpha,$$

$$S_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}\ bh\ \sin\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{h}{b}\ \sin\alpha+\frac{h}{c}\sin\beta,$$

$$\frac{h}{b}=\cos\beta \qquad \frac{h}{c}=\cos\alpha.$$

Beləliklə,

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

16-cı misal. Ölçü analizindən istifadə etməklə A. B. Miqdala istinadən Pifaqor teoremini isbat edək.

Qeyd edildiyi kimi, düzbucaqlı üçbucaq öz hipotenuzu və ona bitişik bir bucağı ilə verilə bilər, deməli, onun sahəsi hipotenuz və ona bitişik bucaqla təyin olunur.

$S_{\Delta ABC}$ – α hipotenuzu və ona bitişik β bucağı ilə təyin olunur.

$$S_{\Delta ABC} = S(\alpha, \beta).$$

$S_{\Delta ABD}$ – c hipotenuzu və ona bitişik β bucağı ilə təyin olunur, yəni

$$S_{\Delta ABD} = S(c, \beta).$$

$S_{\Delta ACD}$ – b hipotenuzu və ona bitişik β bucağı ilə təyin olunur, yəni

$$S_{\Delta ACD} = S(b, \beta).$$

ΔABC-nin sahəsi ABD və ACD üçbucaqlarının sahələri cəminə bərabərdir.

İxtiyari düzgün düsturda sağ və sol tərəflər eyniölçülü olduğundan

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{a^2}=f(\beta).$$

Analoji olaraq

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{c^2}=f(\beta);\quad \frac{S_{\Delta ADC}}{b^2}=f(\beta).$$

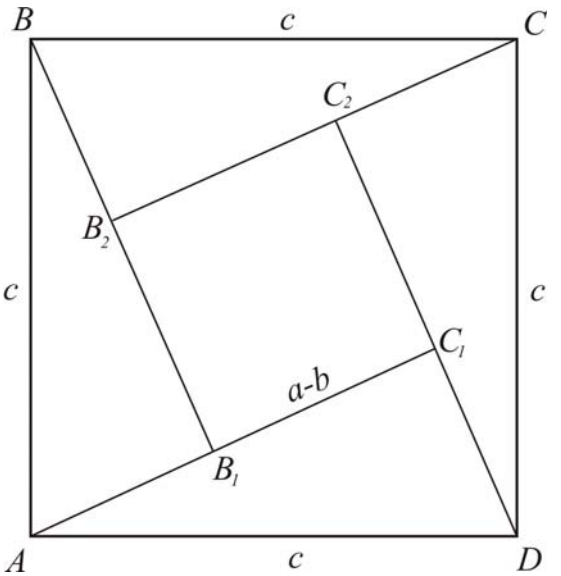
Nəhayət

$$a^2 f(\beta)=c^2 f(\beta)+b^2 f(\beta)$$

Buradan

$$a^2=c^2+b^2$$

alırıq.



11-ci şəkil.

Pifaqor teoreminin hesabi-həndəsi isbatını verək:
Tərəfi c olan kvadratda katetləri a və b olan 4 düzbucaqlı üçbucaq (DC_2C; ABB_1; BB_2C ; AC_1D) və tərəfi $CC_1C_2 = C_2B_2 = a - b$ olan bir kvadrat yerləşir. Beləliklə, kvadratın sahəsi

$$C^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

olur (11-ci şəkil).

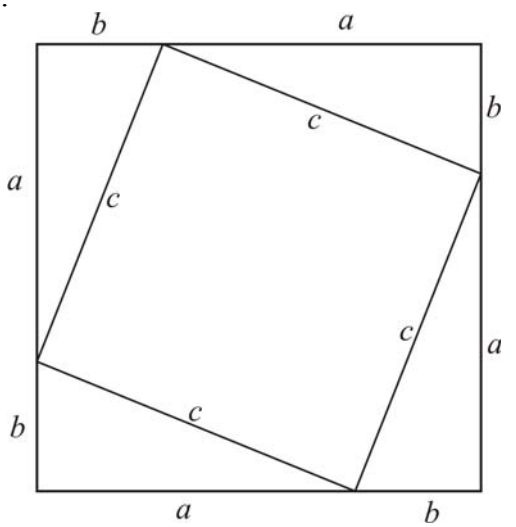
Daha başqa bir isbat verək: tərəfi $(a + b)$ olan kvadrat götürək. Onda

$$a + b^2 = 4\frac{ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

(12-ci şəkil).



12-ci şəkil.

Qeyd edək ki, alman alimi Vipper hələ 1880-cı ildə Pifaqor teopeminin 46 müxtəlif isbatını müəyyən etmişdir.

16-cı a misalı. Neft sənayesi praktikasında V həcmli nefti istismar etmək üçün sərf olunan vaxtların cəmi (T) və quyuların yenidən işlənməsi üçün lazım olan fasilə minimum dövrlərin (n) optimal ədədlərinin tapılması məsələləri meydana gəlir. Fərz edək ki, quyu elastiki rejimdə istismar edilir və təzyiqin sabit şəkildə aşağı düşməsi zamanı debit Q

$$Q = \frac{A}{\sqrt{t}} \qquad (1)$$

düsturu ilə təyin edilir, burada A – sabit əmsal, t – zamandır.

Bir dövr ərzində alınan ümumi neft

$$V_1 = \int^{t_1} Qdt \quad 2At_1^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

düsturu ilə təyin edilir.

Digər tərəfdən

$$V_1 = \frac{V}{n} \tag{3}$$

V həcmli neftin istismar olunmasına sərf edilən vaxt

$$t_2 = t_1 n = \frac{V_1^2}{4A^2} \cdot n = \frac{1}{4A^2}\left(\frac{V}{n}\right)^2 \cdot n \tag{4}$$

düsturu ilə hesablanır.

İstismar olunan zonanın n dəfə işlənilməsinə sərf olunan vaxt

$$t = \Theta n \tag{5}$$

düsturu ilə hesablanır, burada Θ – bir əməliyyatın aparılması vaxtıdır.

Ümumi vaxt T

$$T = t_2 + t_3 = \frac{1}{4A^2} V^2 \frac{1}{n} + \Theta n \tag{6}$$

düsturu ilə təyin edilir.

T zamanın minimal olduğu dövrlərin sayını hesablayaq. Baxılan məsələ həndəsi proqramlaşdırma metodu ilə həll edilən məsələyə gətirilir.

$$c_1 = \frac{V^2}{4A^2}, \quad c_2 = \Theta, \quad x_1 = n$$

$$a_{11} = -1; \quad a_{12} = 1; \tag{7}$$

Çoxhədlilərin standart şəklində məsələ aşağıdakı kimi yazılır.

$$\frac{V^2}{4A^2} n^{-1} + \Theta n = c_1 x_1^{a_{11}} + c_2 x_5^{a_{12}} \tag{8}$$

İkili funksiya

$$V(\sigma) = (c_1 / \sigma_1)^{\sigma_1} \cdot (c_2 / \sigma_2)^{\sigma_1} \tag{9}$$

münasibətindən təyin edilir, σ_1 və σ_2 qiymətləri normallaşdırma və ortoqonallaşdırma şərtlərini, yəni

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 0; \quad \sigma_1 + \sigma_2 = 1 \tag{10}$$

şərtlərini ödəyirlər.

Beləliklə,

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2} \cdot$$

c_1, c_2, σ_1, σ_2 qiymətlərini (9)-da nəzərə alsaq

$$V(\sigma) = \left(\frac{V^2}{2A^2}\right)^{1/2} (2\Theta)^{1/2} = \left(\frac{V^2\Theta}{A^2}\right)^{1/2} \qquad (11)$$

alırıq.

Məlumdur ki, müəyyən məhdudiyyətlər daxilində y (x) çoxhədlisinin minimumu

$$И_j(x') = \sigma_j V(\sigma)^{-ya}, \quad j = 1;\ 2 \qquad (12)$$

uyğun gəlir, burada $И_j(x')$ $У$ (x) çoxhədlisinin birhədliləri, yəni Θ_n, σ_j isə (10)-u nəzərə almaqla ikili funksiyanı maksimallaşdıran çəkilərin qiymətidir.

Beləliklə,

$$\Theta_n = \frac{1}{2}\left(\frac{V^2\Theta}{A^2}\right)^{1/2} \qquad (13)$$

(13)-dən

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{V^2}{A^2\Theta}} \qquad (14)$$

alarıq.

Bu nəticəni (6) funksiyasının minimumunu bilavasitə tapmaqla da almaq olar.

Həndəsi proqramlaşdırmanın burada tətbiqi baxılan metodun imkanlarını illüstrasiya etmək və qeyri-xətti proqramlaşdırma məsələsini polinomial formaya gətirmək mümkün olduqda daha mürəkkəb optimal məsələləri həll etmək nöqteyi-nəzərdən metodik maraq doğurur.

16-cı b misalı. $a^2 + b^2 = 1,\ c^2 + d^2 = 1$ olduqda

$$|\, ac + bd \,| \le 1$$

olduğunu isbat etmək lazımdır.
Əvvəlcə triqonometrik yolla isbat edək.

$$a = \sin\alpha,\ \ b = \cos\alpha,\ \ c = \sin\beta,\ \ d = \cos\beta$$

işarə edək.
Onda

$$a^2 + b^2 = \sin\alpha + \cos\alpha = 1 \quad c^2 + d^2 = \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1,$$

yəni iki şərt ödənilir.
Deməli,

$$|\,ac + bd\,| = |\,\sin\alpha\ \sin\beta + \cos\alpha\ \cos\beta\,| = |\,\cos(\alpha - \beta)| \le 1.$$

Cəbri üsulu tətbiq edək.

$$(bc - ad)^2 \ge 0$$

bərabərsizliyindən istifadə etsək,

$$b^2c^2 - 2bcad + a^2d^2 \ge 0$$

$$b^2c^2 + a^2d^2 + \underline{b^2d^2 + a^2c^2} \ge \underline{b^2d^2 + a^2c^2} + 2bcad$$

alarıq.

Altından xətt çəkdiyimiz ifadə hər iki tərəfə əlavə olunur. Sadə çevirmələrdən sonra

$$a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2) \ge (bd + ac)^2$$

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \ge (bd + ac)^2$$

$$|\,ac + bd\,| \le 1$$

alarıq.

Nəhayət vektor şəklində göstərilişdən istifadə etməklə isbat edək.

$$\bar{r} = ia + jb \qquad \bar{r}_1 = ic + jd$$

vektorlarını daxil edək. Bu vektorların skalyar hasili belə təyin olunur:

$$\bar{r} \cdot \bar{r}_1 = ac + bd = r\,r_1 \cos\gamma$$

(γ – $\bar{r}$ və $\bar{r}_1$ vektorları arasındakı bucaqdır)

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \qquad r_2 = \sqrt{c^2 + d^2} = 1$$

$$|\,ac + bd\,| \le r \cdot r_1 = 1,\ \text{(çünki } \cos\gamma \le 1\text{)}.$$

16-cı c misalı. Q boru kəmərinin məhsuldarlığını elə təyin edək ki, bir tonun çıxarılması dəyəri minimum olsun. Çıxarılma dəyəri $a + bQ$-dir. Hesabi orta kəmiyyətin həndəsi orta kəmiyyətdən böyük və ya bərabər olmasından istifadə edək.

Onda

$$\frac{a+bQ^2}{Q} = \frac{a}{Q} + bQ \geq 2\sqrt{\frac{a}{Q}bQ} = 2\sqrt{ab}$$

olar.

Sol tərəfin minimumu olduğu üçün bərabərsizlik işarəsi bərabərliklə əvəz olunur. Onda

$$a + bQ^2 = 2Q\sqrt{ab}$$

$$Q^2 - 2Q\frac{\sqrt{ab}}{b} + \frac{a}{b} = 0$$

$$Q = \frac{\sqrt{ab}}{b} \pm \sqrt{\frac{a}{b} - \frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

alarıq.

Başqa misal göstərək:

Düzbucaqlının s sahəsi verilımişdir. Düzbucaqlılardan perimetri ən kiçik olanını tapın. Tərəfi x ilə işarə edək: Onda ikinci tərəf $\frac{s}{x}$ olar.

Düzbucaqlının perimetri

$$2x + 2\frac{s}{x} = 2\left(x + \frac{s}{x}\right)\text{-dir.}$$

Buradan

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\ (a+b) \geq 2\sqrt{ab}\ .$$

Sol tərəf bərabərlik işarəsi olduqda minimal olur. Onda

$$2\left(x + \frac{s}{x}\right) = 2 \cdot 2\sqrt{x \cdot \frac{s}{x}} = 4\sqrt{s} \qquad x = \sqrt{s} \quad \text{alarıq.}$$

Bu məsələlər ekstremumun tapılması yolu ilə də həll edilə bilər.

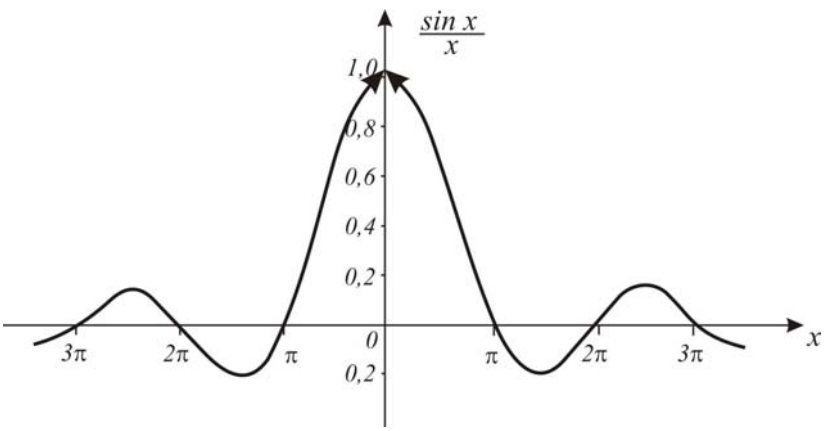
$$y = \frac{a + b\,Q^2}{Q} \quad \frac{dy}{dQ} = -\frac{a}{Q^2} + b = 0$$

$$Q = \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

$$z = 2\left(x + \frac{s}{x}\right) \quad \frac{dz}{dx} = 2\left(1 - \frac{s}{x^2}\right) = 0$$

$$1 - \frac{s}{x^2} = 0 \qquad x = \sqrt{s}.$$

Təbiidir ki, bu qiymətlər əvvəl tapılmış qiymətlərlə üst-üstə düşür. Əksər hallarda yeni vəziyyətdə nəticəyə ədədi hesablamaların aparılması əsasında təxmini gəlmək olar. Sonra isə alınan nəticələr dəqiqləşdirilir, daha doğrusu, riyazi əsaslandırılır. Misal gətirək.



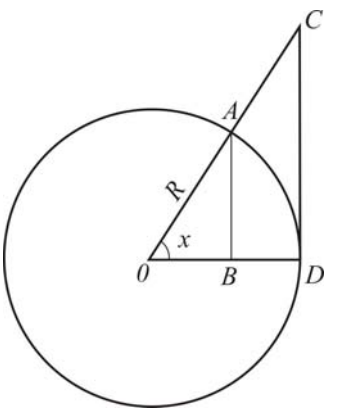
13-cü şəkil.

17-ci misal.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \text{ tapın.}$$

Baxılan ifadə $\frac{0}{0}$ tipli qeyri-müəyyənlikdir. Bu qeyri-müəyyənliyi ədədi hesablamalar əsasında açaq. Bunun üçün x dəyişəninə $0{,}5^\circ$-dən 5°-yə qədər olan qiymətləri hər bir $0{,}5^\circ$-dən sonra verək. Bu qiymətləri padiana çevirək.

Hesablamaların dəqiqlik dərəcəsini, yəni vergüldən sonra neçə işarənin götürüldüyünü təyin etmək zəruridir. 19-cu cədvəldən görünür ki, hesablamaları ikinci işarə dəqiqliyi ilə aparsaq $0{,}5^\circ$ üçün $\frac{\sin x}{x} \cong 1$ (13-cü şəkil) alarıq. $\frac{\sin}{x}$ ifadəsinin 1-ə yaxınlaşmasının riyazi əsasının dəqiqləşdirilməsi imkanı vardır. (14-cü şəkil).



14-cü şəkil

Kiçik x bucaqları üçün $(x \to 0)$

$\cup AD = Rx$, x radianlarla ölçülür, R çevrənin radiusudur.

$$AB = R \sin x$$

$$CD = R\, tg\, x$$

$$OB = R \cos x$$

14-cü şəkildən görünür ki,

19-ci ədvəl

X dərəcə-lərdə	X rad $\frac{\sin x}{x}$		X rad $\frac{\sin x}{x}$		X rad $\frac{\sin x}{x}$	X rad $\frac{\sin x}{x}$	X rad $\frac{\sin x}{x}$		
	dəqiqlik 10^{-6}		dəqiqlik 10^{-5}		dəqiqlik 10^{-4}	dəqiqlik 10^{-3}	dəqiqlik 10^{-2}		
0,5	0,008726	1	0,00872	1	0,0087	1	1	0,01	1
1,0	0,017453	0,999943	0,01745	0,99994	0,0174	0,9999	1	0,02	1
1,5	0,026179	0,999885	0,02618	0,99980	0,0262	0,9999	1	0,03	1
2,0	0,034906	0,999799	0,03490	0,99980	0,0449	0,9998	1	216	1
2,5	0,043633	0,999679	0,04363	0,99967	0,0436	0,9997	1	0,04	1
3,0	0,052359	0,999541	0,05236	0,99954	0,0523	0,9995	1	0,05	1
3,5	0,061086	0,999378	0,05108	0,99938	0,0611	0,9994	1	0,06	1
4,0	0,069813	0,999183	0,06981	0,99918	0,0698	0,9992	1	0,07	1
4,5	0,078539	0,998968	0,07854	0,99989	0,0785	0,9989	1	0,08	1
5,0	0,087266	0,998728	0,08726	0,99873	0,0872	0,9987	1	0,09	1

$$S_{\Delta ABO} < S\ sekt_{ADO} < S_{\Delta CDO}$$

$$\frac{R^2 \cos x \sin x}{2} \le \frac{R^2 x}{2} \le \frac{R^2 tg\, x}{2}$$

$$\cos x \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$$

$$1 \le \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \le 1$$

18-ci misal.

Aşağıdakı xüsusi limitə baxaq:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Bu ifadənin ədədi qiymətini qabaqcadan təyin etmək üçün Nyuton binomundan istifadə edərək $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ifadəsini yuxarıdan qiymətləndirək:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + 1 + n\ \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} = S_n$$

$$S_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) +$$

$$+ \cdots < 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ ^*$$

$$+ \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\ ^*$$

---

* Qeyd edək ki, $2! = 2$; $3! > 2^2$; $4! > 2^3$; $5! > 2^4$; $n! > 2^{n+1}$

20-ci ədvəl

n	1/n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	1/n	n	1/n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	1,000000	2	80	0,012500	2,701371	200	0,050500	2,711222
5	0,200000	2,488312	85	0,011765	2,702453	–	0,004000	2,712849
10	0,100000	2,593737	90	0,011111	2,703371	300	0,003333	2,723121
15	0,066666	2,632837	95	0,010526	2,704034	350	0,002857	2,714342
20	0,050000	2,653288	100	0,010000	2,704724	400	0,002500	2,715021
25	0,400000	2,665854	105	0,009524	2,705521	450	0,002222	2,714342
30	0,033333	2,674252	110	0,009091	2,706076	500	0,002000	2,715564
35	0,028571	2,680356	115	0,008695	2,706225	550	0,001666	2,715564
40	0,025000	2,680356	120	0,008333	2,706780	700	0,001428	2,715292
45	0,022222	2,688692	125	0,008000	2,707430	800	0,001250	2,716107
50	0,020000	2,691503	130	0,007692	2,707592	900	0,001111	2,715564
55	0,018182	2,693899	135	0,007407	2,708241	1000	0,001000	2,715564
60	0,016666	2,695759	140	0,007143	2,708459	2000	0,000500	2,718281
65	0,015385	2,297754	145	0,006896	2,708621	4000	0,000250	2,718281
70	0,014286	2,699185	150	0,006666	2,709054	8000	0,000125	2,718281
75	0,013333	2,700332	155	0,006451	2,709189	10000	0,000100	2,718281

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ sırası $a_1=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$ olan sonsuz azalan həndəsi silsilədir. Bu sıranın cəmi

$$\sum=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1/2}{1-1/2}=1$$

düsturu ilə hesablanır.

Beləliklə, $S_n<3$ alırıq.

Ədədi hesablamalar göstərir ki, n-nin artması ilə S_n də artır və gördük ki, S_n-nin ən böyük qiyməti 3-ə bərabərdir (20-ci cədvəl). 20-ci cədvəldən alınır ki, vergüldən sonra iki işarə ilə kifayətlənsək, $n=200$ olduqda

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}71=l \text{ olar.}$$

Burada analizin aşağıdakı teoremini tətbiq etmək zəruridir.

Teorem. x_n dəyişəni azalmırsa və yuxarıdan N ədədi ilə məhduddursa, onun M-ə bərabər limiti var və bu limit N-i aşmır, yəni

$$\lim x_n=M\le N$$

U. U. Soyerin ifadəsi ilə desək, yuxarıda baxılan sıra özünü «yaxşı» aparan sıralara, riyazi dildə desək, yığılan sıralara aiddir. Özünü «pis» aparan sıraların, yəni dağılan sıraların da olduğunu bilmək zəruridir və burada insanları bir sıra səhvlər gözləyə bilər. Qaussun izahını verək.

$1-1+1-1\cdots$ sırasına baxaq və göstərək ki, onun cəmi varsa, onun hədlərini cürbəcür qruplaşdırmaqla müxtəlif nəticələr almaq olar.

Məsələn:

$$S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0,$$

$$S=1+(-1+1)+(-1+1-1)+\cdots=1$$

və nəhayət

$$S=1-(1-1+1-1+\cdots)=1-S \qquad S=\frac{1}{2}$$

Beləliklə, 0 = 1/2 = 1, bu isə təbii olaraq baxılan yanaşmanın düzgün olmadığını göstərir. Baxdığımız halda sıra özünü «pis» aparan (dağılan) sıradır, yuxarıda göstərilən əməllərin tətbiqinin qeyri-mümkünlüyünü müəyyən edir.

Yığılan sıralar üçün məlum əməliyyatları əksər hallarda tətbiq etmək olar. Özünü kafi aparan (şərti yığılan) sıralara bir qədər ehtiyatla yanaşmaq lazımdır.

19-cu misal. Ani sürəti təyin edək. Tutaq ki, maddi nöqtənin hərəkət tənliyi $S = t^2$-dır, burada t – [dəq.] , S – [m]. $t_0 = 1$ dəq. zaman anında υ sürətini təyin edək. Bu zamana yaxın olan $t_1 + 1{,}1$ dəq. qiymətini götürək: hərəkəti müntəzəm hesab etməklə orta sürəti hesablayaq.

$$\upsilon = \frac{t_1^2 - t_0^2}{t_1 - t_0} = \frac{1{,}21 - 1{,}0}{0{,}1} = 2{,}1 \text{ m/dəq.}$$

$$t_1 = 1{,}05 \text{ dəq.} \qquad \upsilon = \frac{(1{,}05)^2 - (1{,}05)^2}{0{,}05} = 2{,}05 \text{ m/dəq.}$$

$$t_1 = 1{,}03 \text{ dəq.} \qquad \upsilon = \frac{(1{,}03)^2 - (1{,}0)^2}{0{,}03} = 2{,}03 \text{ m/dəq.}$$

$$t_1 = 1{,}01 \text{ dəq.} \qquad \upsilon = \frac{(1{,}01)^2 - (1{,}0)^2}{0{,}01} = 2{,}01 \text{ m/dəq.}$$

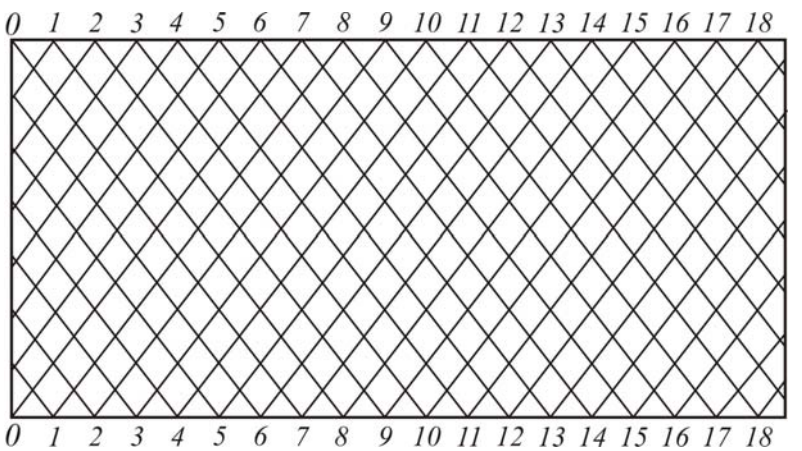
$$t_1 = -1{,}005 \text{ dəq.} \qquad \upsilon = \frac{(1{,}005)^2 - (1{,}0)^2}{0{,}005} = 2{,}005 \text{ m/dəq.}$$

Beləliklə, vergüldən sonra iki işarə dəqiqliyi ilə t = 1 dəq. zaman anında ani sürətin 2 m/dəq. olduğunu alırıq. Törəməyə əməliyyat simvolu kimi baxılmasını ilk dəfə Karl Marksın təklif etdiyini qeyd etmək maraqlıdır. Elmi işçilərdən birinin

obrazlı şəkildə qeyd etdiyi kimi, Marks sonsuz kiçilənlər analizinin ondan qabaq gələn şərhçilərinin nəsli tərəfindən əsaslı dərəcədə dolaşdırılmış düyününü nəinki açmayıb, hətta onu kəsib atmışdır.

Qrafiklərin əhəmiyyətini əyani nümayiş etdirən misal göstərək.

19-cu a misalı. Ə. Lyük riyazi konqresdə aşağıdakı məsələni təklif etmişdir: hər gün günorta poçt paraxodu Havrdan Nyu-Yorka və elə bu zaman Nyu-Yorkdan Havra həmin kompaniyanın paraxodu yola düşür. Həm bu, həm də digər istiqamətdə yola 8 gün qət edilir. Bu gün Havrdan günorta yola düşən paraxod yolda öz kompaniyasının neçə paraxodu ilə pastlaşacaqdır? İxtiyari paraxod üçün 15-ci şəklə nəzər salsaq, aydın olar ki, paraxod dənizdə 13 və Havrdan çıxan və Havra gələn daha 2 paraxoda rast gələcək. Qrafikdə həm də aydın olur ki, görüş hər gün günorta və gecə yarısı baş verəcək.



15-ci şəkil.

Məlum olduğu kimi, analiz üçün müşahidə nəticələri deyil, müşahidə metodları əsasdır. Müşahidələr verilənləri təqdim

edir (onlar qurtarmış xarakter daşımırlar və düzəldilə bilərlər), empirik verilənlər isə zəruri hipotezin seçilməsi üçün yoldur. İxtiyari metod müəyyən müqəddimələrdən irəli gəldiyindən «sırf» müşahidə və ya ölçmə metodlarının olması təbiidir. Eyni zamanda, bir metod digərindən «təmiz» ola bilər. R. Kurta istinad edərək, aşağıdakı beş şərti ödəyən hər hansı təklifi hipotez kimi yararlı hesab etmək olar:

1. Qəbul olunan təqribilik dəqiqliyi ilə mövcud faktlara zidd gəlmir.
2. Həqiqətə uyğundur.
3. Daxili ziddiyyətsizdir.
4. Nəzəriyyənin digər modellərinə zidd deyil.
5. Müəyyən metod ilə alınmalıdır.

Hipotezin qəbul olunması üçün əsas zəruri şərt onun «işlək» olmasıdır. Bu şərtin kafiliyi isə aparılan işin məqsədləri və motivləri ilə müəyyən olunur. Praktik həyata keçirilmə zəruri olduqda bu şərt kafidir. Mexanizmi başa düşmək lazımdırsa, (1) və (2) şərtlərinin ödənilməsi zəruridir.

Blok yazır: «Şair Harmoniyanın oğludur və ona dünya ədəbiyyatında hər hansı rol verilmişdir. Ona üç iş həvalə olunmuşdur: 1) səsləri doğma başlanınci olmayan stixiyadan azad etmək; 2) bu səsləri harmoniyaya gətirmək, onlara forma vermək; 3) bu harmoniyanı xarici aləmə çıxartmaq.»

Bu xüsusiyyətləri elmə aid etməyə çalışsaq aşağıdakını alırıq:

1. Təkrar olunan faktların, hadisələr arasındakı əlaqələrin təyin edilməsi.

2. Fakt və göstərişlərin xaosunu, qarmaqarışıqlığını hipotez və nəzəriyyələr vasitəsilə harmoniyaya gətirmək.

3. Tədqiqatların nəticələrini müzakirəyə vermək.

Ehtimal ki, üçüncü məsələ ən çətin məsələdir. Xarici alim-rəssam və ya alimə açılan uyğunluqların, harmoniyanın sirrini bilməsi üçün psixoloji müntəzirlik, uyğun hazırlaşma, digər ürəyə daxilolma arzusu lazımdır, yəni S. V. Meyenin dərdə

şərik olmaq prinsipi fəaliyyət göstərməlidir. Ruhi tələbat olduqda əks-səda və anlama da meydana gəlir.

Deməli, hipotez «həqiqətə uyğun olmalı» və müəyyən üsulla alınmalıdır (2-ci və 5-ci şərtlər): metodik yanaşmanı həmişə digər maraqlanan şəxsə izah etmək olar.

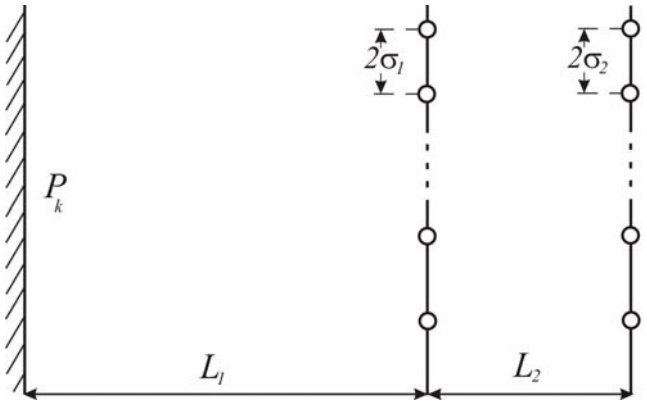
Hipotezlərin irəli sürülməsi üçün aşağıdakı metodlardan istifadə olunur: 1) induksiya ; 2) analogiya ; 3) invariantlıq ; 4) requlyarlıq , eləcə də bu və ya digər nöqteyi-nəzərdən sadəlik dərəcəsi qiymətləndirilir. Bu kitabda müşahidə nəticələrinin ideallaşdırılması və ümumiləşdirilməsi üçün tətbiq olunan induksiya metoduna, demək olar ki, toxunmuruq. Müxtəlif səviyyələrdə analoyi üsuldan istifadə olunması isə bir sıra misallarla göstətilmişdir.

İnvariantlıq prinsipi: «nə isə» qeyri-xətti qanunun müzakirəsi, ölçü təhlilinin tətbiqi və s. ilə əlaqədar misallarda istifadə olunan dəyişənlərin müəyyən çevirmələrinə nəzərən invariant olmalıdır;

Sadəliyin qiymətləndirilməsi məsələsi xeyli çətindir, çünki onu qiymətləndirmək üçün obyektiv üsul yoxdur. Aşağıdakı nöqteyi-nəzər əsas götürülərək bu məsələyə baxılmayıbdır: Deyilə bilən nə varsa, aydın deyilə bilər. Sadəliyi «ölçmək» üçün ayrı-ayrı cəhdlər edildiyi vacibdir, məsələn, Popper qeyd edir ki, sadəlik və həqiqətəuyğunluq arasında «mənfi» korrelyasiya mövcuddur.

Requlyarlıq prinsipi baxılan funksiyaların kəsilməzliyi, diferensiallanması, holomorfluğu, dəyişənin kifayət qədər kiçik və böyük qiymətində özünü asimptotik aparması ilə əlaqədar olan fərziyyələri özündə saxlayır.

Requlyarlıq prinsipi kəsilməzliklə əlaqədar olub, ilk dəfə Leybnis tərəfindən ifadə olunmuşdur: «Əgər iki hal arasında in datis və ya verilənlərdə fərq sonsuz kiçik edilə bilərsə, onda in quabsitis və ya nəticələrdəki fərq də sonsuz kiçik olmalıdır». Natura nonfacit saltus formasında (təbiət sıçrayışlara dözüm) requlyarlıq prinsipinin Aristotelə şamil edirlər.



16-cı şəkil.

Burada və bundan sonrakı misallarda requlyarlıq prinsipini nəzərdən keçirək.

20-ci misal. Bir çox texnoloji proseslər xətti cəbri və diferensial tənliklər sistemi ilə xarakterizə olunur.

Məsələn, xətti tənliklər sistemi sərt su təzyiqi rejimində quyunun bircins laylarda interferensiyasını (qarşılıqlı təsirini) xarakterizə edir; bu halda quyunun debiti (məhsuldarlığı) və quyu dibi təzyiqi xətti münasibətlə bağlıdır. Korrektlik məsələsini illüstrasiya etmək üçün verilmiş depressiya qiymətlərində (kontur və quyu dibi təzyiqi arasındakı fərq) quyuların iki düzxətli batareyalarının debitlərinin hesablanmasını nəzərdən keçirək (16-cı şəkil). Bu halda uyğun olaraq Q_1 və Q_2 batareyalarının debitlərinin cəmini hesablamaq üçün tənliklər sistemi aşağıdakı şəkildə olur:

$$\begin{cases} \dfrac{2kh}{\mu}\left(P_k - P_1\right) = \left(\dfrac{L_1}{\sigma_1 m_1} + \dfrac{\ln \dfrac{\sigma_1}{\pi R_1}}{\pi m_2} \right) Q_1 + \dfrac{L_1}{\sigma_1 m_1} Q_2 \\ \dfrac{2kh}{\mu}\left(P_k - P_2\right) = \dfrac{L_1}{\sigma_1 m_1} Q_1 + \left(\dfrac{L_1}{\sigma_1 m_1} + \dfrac{L_2}{\sigma_2 m_2} + \dfrac{\ln \dfrac{\sigma_2}{\pi R_2}}{\pi m_2} \right) Q_2 , \end{cases}$$

burada k – süxurun keçiricilik qabiliyyəti, μ – neftin özlülüyü, h – süxurun gücü, p_k – kontur təzyiqi, p_1, p_2 – batareyalarda quyu dibi təzyiqi, $2\sigma_1, 2\sigma_2$ – batareyalarda quyular arasındakı məsafə, R_1, R_2 – batareyalarda quyuların radiusları, m_1, m_2 isə batareyalarda quyuların sayıdır.

Parametrlərin aşağıdakı qiymətlərini götürək:

$R_1 = R_2 = 0{,}1$ m,	$\sigma_1 - \sigma_2 = 50$ m,
$L_1 = 5000$ m,	$L_2 = 200$ m,
$P_k - P_1 = 64$ atm,	$P_k - P_2 = 67$ atm,
$k = 1$ d, $h = 10$ m	$\mu = 1$ spz. $m_1 = m_2 = 100$.

Bu qiymətləri tənliklər sisteminə yazsaq alarıq:

$$\begin{cases} 1{,}0161\, Q_1 + Q_2 = 11059{,}2 \\ Q_1 + 1{,}0561\, Q_2 = 11577{,}6 \end{cases}$$

Bu tənliklər sistemini həll etsək, debitlər üçün aşağıdakı qiymətləri alarıq:

$$Q_1 = \frac{11059{,}2 \cdot 1{,}0561 - 11579{,}6 \cdot 1}{1{,}0161 \cdot 1{,}0561 - 1} = \frac{102{,}021}{0{,}0731} = 1395 \ \text{m}^3/\text{gün}$$

$$Q_2 = \frac{1{,}0161 \cdot 11577{,}6 \cdot 11059{,}2}{0{,}0731} \approx 9640 \ \text{m}^3/\text{gün}$$

Fərz edək ki, batareyada depressiyanı ölçdükdə 1,5 % səhv etmişik, yəni $P_k - P_1 = 65$ atm. Tənliklər sisteminə daxil olan başqa parametrləri dəyişmədən depressiyanın bu qiymətində batareyaların debitlərinin qiymətini hesablayaq:

$$Q_1' = 3890 \ \text{m}^3/\text{gün}.$$
$$Q_2' = 7280 \ \text{m}^3/\text{gün}.$$

Belə tənliklər sisteminə pis şərtləşdirilmiş sistem deyilir.

Deməli, məsələnin bu cür qoyuluşu korrekt deyil, digər tərəfdən isə quyudan neft çıxarılanda, debit bu və ya digər dəqiqliklə təyin olunan və real quyu dibi təzyiqi mövcud olanda da realdır. Onları necə təyin etmək lazımdır? Bəlkə modeli korrektləşdirmək, bəlkə də hansı üsulla isə ilk informasiyanı elə işləmək lazımdır ki, nəticədə maneəyə dayanıqlı olsun.

İlk dəfə qeyri-korrekt qoyulmuş məsələlər problemi Adamar*,** tərəfindən ifadə edilmişdir. Daha bir misala baxaq.

Fərz edək ki, y və y_1 funksiyaları kifayət qədər kiçik kəmiyyətlə fərqlənir.

$$y = y_1 + \frac{1}{n} \sin n^2 t ,$$

burada n – sabit ədəd, t – isə arqumentdir.

---

* Adamar (Hadamard) Jak (1895 – 1963) fransız riyaziyyatçısı, Rusiya Elmlər Akademiyasının xarici müxbir üzvü (1922), Rusiya Elmlər Akademiyasının xarici fəxri üzvüdür(1929). Diferensial tənliklərə, funksiyalar, ədədlər nəzəriyyəsinə və mexanikaya aid əsərləri vardır.

** 35-ci misala bax.

$\sin n^2 t$ -nin maksimal qiyməti 1-ə bərabərdir. Kifayət qədər böyük n üçün $\frac{1}{n}\sin n^2 t$ kifayət qədər kiçik ola bilər, məsələn $n = 10^5$ olduqda bu kəmiyyətin qiyməti

$$\frac{1}{n}\sin n^2 t \le \frac{1}{10^5}$$

olar. Törəmə alsaq

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + n\cos n^2 t$$

alarıq.

$n = 10$ olduqda elə t var ki, $\left| n\cos n^2 t \right| = 10^6$, yəni törəmələrin fərqi çox böyük olur, funksiyadakı kiçik xəta onun törəməsinin təyin edilməsindən böyük xətaya gətirib çıxarır.

21-ci cədvəl

Zaman	Neftin debiti		Δy,%	Çıxarılma tempi		
t, gün	y, m^3/gün		y_1, m^3/gün	$\frac{dy}{dt}$	$\frac{dy_1}{dt}$	$\Delta\left(\frac{dy}{dt}\right)$%
1	3866	3900	0,87	1745	3805	54,1
2	7640	7613	0,35	1957	3619	45,9
3	11130	11143	0,12	1199	3443	65,2
4	14466	14504	0,26	2321	3275	29,1
5	488	17696	0,09	5284	3115	41,0
6	20711	20736	0,12	4758	2963	37,7
7	23588	26624	0,15	2056	2818	27,0
8	26373	26376	0,01	202	2681	6,6
9	28959	28992	0,11	1437	2350	43,6
10	31451	31480	0,09	3946	2426	38,5

Neft çıxarılması sürətinin təyinində böyük xətalara gətirən neft çıxarılmasının təyini zamanı buraxılan xətaların təsirinə baxaq.

Tutaq ki, neft çıxarılışı üzrə toplanan mədən verilənləri var və onların işlənməsi nəticəsində aşağıdakı uyğunluq alınmışdır:

$$Q = Q_0 \left(1 - e^{-\alpha}\right) + \frac{Q_1}{n} \sin n^2 t \,, \qquad (1)$$

burada Q_0, Q_1, α və n əmsalları uyğun olaraq 8×10^4 m/gün, 3×10^2 m^3/gün, 0,051 gün 8-ə bərabərdir, burada $y = Q$ və $y_1 = Q\,(1 - e^{-\alpha})$ -dir. 21-ci cədvəldən görünür ki, y və y_1 bir-birindən az fərqlənirlər.

Göstərilmiş asılılıqdan çıxarılma tempini təyin edək:

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha\, Q_0\, e^{-\alpha t} + Q\, n \cos n^2 t \,,$$

Burada

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dy}{dt}\,, \quad \frac{dy_1}{dt} = \alpha\, Q_0\, e^{-\alpha t} \qquad (2)$$

y_1-in y-dən fərqinin (debitin təyin olunmasında kiçik səhvlərin) neftin çıxarılması tempinə təsirini qiymətləndirək.

Cədvəldən göründüyü kimi, $t = 2$ gün olduqda debitin təyin edilməsində xəta 0,35 % olduğu halda , çıxarma tempinin təyin olunmasında xəta 45,9 % ; $t = 3$ gün olduqda isə xətalar uyğun olaraq 0,12 % və 65,2 % olur.

Beləliklə, debitin təyin olunmasında buraxılan kiçik səhv mayenin çıxarılma sürətinin təyinində təbii xətalara gətirib çıxarır.

21-ci misal. Bəzən təcrübi tədqiqatlar apararaq ölçü dəqiqliyi sərhəddində olan düstur alırlar. Misal gətirək. Tədqiqatçılardan biri bir dəfə səthi aktiv maddələrin – səthi gərginliyin qazma qarışıqlarının ΔP borularında hərəkəti zamanı hidravlik müqavimətinə təsirini öyrənərək aşağıdakı düsturu almışdır:

$$\Delta P = A \sqrt[4]{\sigma},$$

burada A əmsalı vurulan sistemin həndəsi ölçülərini, xassələrini nəzərə alır.

Təcrübələrdə σ 2 dəfə dəyişmişdir;

$$\Delta P_1 = A\sqrt[4]{\sigma_1} \qquad \Delta P_2 = A\sqrt[4]{\sigma_2}$$

$$\frac{\Delta P_1}{\Delta P_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \qquad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2\,\frac{\Delta P_1}{\Delta P_2} \cong 1{,}1$$

yəni σ-nın dəyişməsi nəticəsində ΔP 10 % dəyişə bilər, ölçmələr isə manometrlə 5% dəqiqliklə aparılmışdır. Buradan alınmış düsturun qiyməti aydın olur.

Düsturlarla hesablama apardıqda, verilmiş kəmiyyətlərin məlum dəqiqliyinə əsasən nəticənin xətasını hesablamaq zəruridir. Həm də nəticənin lazım olan dəqiqliklə alınması üçün başlanğıc verilənlərinin də dəqiqlik dərəcəsini təyin etmək də zəruridir.

Dəqiqlik məsələsinə böyük əhəmiyyət verərək, konkret misalda xəta nəzəriyyəsinin əsaslarını göstərək.

Qazın məsaməli mühitdən filtrasiyası zamanı onun nüfuzluğu belə təyin olunur:

$$K = \frac{2L\mu_2 VP_\delta}{r\left[(\Delta P)^2 + 2P_2\Delta P\right]\sigma T}\ , \quad \Delta P = P_1 - P_2\ . \quad (1)$$

burada L – nümunənin uzunluğu; μ_2 – qazın özlülüyü; V – τ zamanı ərzində məsaməli mühitdən keçən qazın həcmi; P_δ – barometrik təzyiq; P_1 və P_2 – çənin başlanğıc və son kəsiklərində təzyiq; T – temperatur; r isə çənin radiusudur. K – mütləq xəta. K arqumentlərin xətası vasitəsilə belə təyin olunur:

$$\Delta K = \left(\frac{\partial k}{\partial L}\right)(\Delta L) + \left(\frac{\partial k}{\partial \mu_2}\right)(\Delta \mu_2) + \left(\frac{\partial k}{\partial V}\right)(\Delta V) +$$

$$+ \left(\frac{\partial k}{\partial p_\delta}\right)(\Delta p_\delta) + \left(\frac{\partial k}{\partial r}\right)(\Delta r) + \left(\frac{\partial k}{\partial \Delta p}\right) \cdot \left|\Delta(\Delta p)\right| + \qquad (2)$$

$$+ \left(\frac{\partial k}{\partial p_2}\right)(\Delta p_2) + \left(\frac{\partial k}{\partial \tau}\right)(\Delta \tau) + \left(\frac{\partial k}{\partial T}\right)(\Delta T).$$

Nisbi xəta

$$\rho_k = \frac{\Delta k}{k} \quad \text{olacaqdır.} \qquad (3)$$

(2)-dən Δk -nı tapıb (3)-də yerinə yazsaq və (1) -i nəzərə alsaq nüfuzluğun nisbi xətası üçün

$$\rho_k = \rho_\alpha + \rho_{\mu_1} + \rho_V + \rho_{p\delta} + \rho_\tau + 2\rho_r + \rho_T +$$

$$+ \frac{2\,(\Delta P)^2 + P_2 \Delta P}{(\Delta P)^2 + 2\,P_2 \Delta P}\,\rho_{\Delta p} + \frac{2\,\Delta P P_2}{(\Delta P)^2 + 2\,P_2 \Delta P}\,\rho_{p_1} \qquad (4)$$

alırıq.

Hesablama üçün verilənlər: çənin uzunluğu 110 ± 0,3 m; qazın özlülüyü 0,028 ± 0,0001m . . . ; məsaməli mühitdən τ zaman ərzində keçən qazın həcmi V = (1000 ± 5) 10^{-6} m^3; barometrik təzyiq 760 ± 2 mm civə sütunu, çənin radiusu (2,6 ± 0,01) 10^{-2} m; təzyiqin yuxarı və aşağı səviyyəsi arasındakı fərq

$$\Delta P = 0{,}06 \pm 0{,}0003 \text{ МПа};$$

Çənin sonlu kəsiyində təzyiq P_2 = (148 ± 0,05);

τ = (40 ± 0,2) dəq; T = 293 ± 0,5 ˚K

ρ_k nisbi xətanı və K üçün düzgün rəqəmlərin sayını müəyyən etmək üçün

$$\rho_\alpha = \frac{93}{110} \cdot 100 = 0{,}27\% \qquad \rho_{\mu_1} = \frac{0{,}0001}{0{,}028} \cdot 100 = 0{,}35\%$$

$$\rho_V = \frac{5}{1000} \cdot 100 = 0{,}5\% \qquad \rho_{p\delta} = \frac{0{,}7}{400} \cdot 100 = 0{,}17\%$$

$$\rho_r = \frac{0{,}01}{26} \cdot 100 = 0{,}4\% \qquad \rho_\tau = \frac{0{,}2}{40} \cdot 100 = 0{,}5\%$$

$$\rho_T = \frac{0{,}5}{293} \cdot 100 = 0{,}17\% \qquad \rho_{\Delta p} = \frac{0{,}003}{0{,}05} \cdot 100 = 0{,}6\%$$

ədədi qiymətləri yerinə qoyaq. 2 ədədi vurğunun xətasını sıfır götürək. Onda (1) və (4) düsturlarından

$$K = 29{,}7 \text{ md}; \quad \rho_k = 3\%$$

alırıq.

Beləliklə,

$$K = 29{,}7 \quad (1 \pm 0{,}03) \text{ md}.$$

Beləliklə, məsaməli mühitin həqiqətən keçirmə qabiliyyəti 28,8 md ilə 30,6 md arasındadır. Bu sərhədlərin fərqi 1,8 md-dir. Buradan görünür ki, axtarılan nəticənin iki doğru rəqəmi var.

22-ci misal. Təcrübi verilənlərin araşdırılmasında buraxılan səhvləri necə «söndürmək» mümkün olduğuna baxaq, yəni maneə dayanıqlı üsulların tətbiq edilməsi ideyasını sadə misallarla nümayiş etdirək. Məsələn, təzyiqin (y) düşməsi (depressiya – lay və quyu dibi təzyiqlərinin fərqidir) ilə debiti (x) arasındakı əlaqəni müəyyən etmək lazımdır.

Aşağıdakı asılılıqlar ola bilər: xətti qanun üçün*

$$y = \alpha_1 x$$

---

* 30-cu misala bax.

kvadratik qanun üçün*

$$y = \alpha_2 x^2 ,$$

ümumiləşdirilmiş qeyri-xətti qanunu üçün

$$y = \alpha_3 x + \alpha_4 x^2 .$$

Qeyd edək ki, məchul funksiyanın xətti approksimasiyası haqqında danışarkən, asılı olmayan dəyişənin birinci dərəcəsinin qabağındakı əmsalın sıfırdan fərqliliyi fərz edilir. Bu fərziyyə Laplasın bərabərehtimallılıq prinsipinə və simmetriklik mülahizələrinə əsaslanır. Əmsalın «həqiqi» qiyməti məlum olmadığından onların bütün qiymətləri «eyni dərəcədə» mümkündür.

Beləliklə, əmsalın sıfırdan fərqli olması ehtimalı sıfıra bərabər olması ehtimalından dəfələrlə böyükdür. Alınmış təcrübi qiymətlərin bu qanunlardan hansına uyğun olduğunu müəyyən etmək lazımdır. x və y-in müəyyən xəta ilə təyin edilməsini nəzərə almaq zəruridir.

Birinci qanuna görə

$$\frac{y}{x} = \alpha ,$$

yəni bu kəmiyyətlərin nisbəti sabit olmalıdır.

Tutaq ki, buruq $y = 5$ depressiyada, orta hesabla 25 m^3/gün neft verir.

Doğrudan da həm debit, həm təzyiqin yuxarı və aşağı qiyməti arasındakı fərq müəyyən dəqiqlik dərəcəsi ilə müəyyən olunur.

Layın 200 atm. nəzərdə tutulmuş təzyiqini dərinlik manometri ilə ölçdükdə buraxılan xəta ən böyük qiymətin 0,35%-ni təşkil edər, yəni

---

* 30-cu misala bax.

$$\frac{0{,}35 \cdot 200}{100} = 0{,}7\ atm$$

debit üçün xəta 0,2 m^3/gün-ə bərabər qəbul olunur.

Bütün yataq üçün α kəmiyyətinin orta qiymətini təyin etmək lazımdır. Layın bircinsliliyi və bütün quyuların «eyni şəraitdə» olmaları fərz edilir. Burada «orta» sözünü bütün quyular çoxluğu üzrə orta kimi başa düşmək lazımdır. Nominalları yerinə yazsaq,

$$\alpha_1 = \frac{5}{25} = 0{,}2\ \frac{atm \cdot gün}{m^3}$$

alarıq.

Məxrəcdə və surətdə təsadüfi y və x kəmiyyətləri olduğu üçün orta – riyazi gözləmə α_1 nominal kəmiyyətlərin istifadə edilməsi zamanı alınan 0,2 qiymətinə bərabər olmayacaqdır. Bundan əlavə qəbul olunmuş modeldə axtarılan riyazi gözləmə mövcud deyil. Bu çətinlikdən necə çıxmalı? Elə bil ki, model həqiqətə uyğun gəlmir. Belə hallar üçün Y. İ. Xurqin belə bir çıxış yolu təklif edir: təsadüf əmsallı xətti tənliklər sisteminin həlli üçün ziddiyyət sonsuzluğa gedən paylanmaların «quyruqlarının» nəzərə alınması nəticəsində müşahidə olunur. Bu zaman kəsilmiş «quyruqlu» paylanmalara, yəni finit adı daşıyan sonlu intervalda toplanmış, kəsilmiş «quyruqları» olan paylanmalara müraciət etmək lazımdır.

Biz kvadratik qanuna baxmaq istəyiriksə, ilk baxışda y və x^2 koordinatlarında qurub, düz xətt alarıq və təcrübi olaraq, nöqtələr düz xətt ətrafında yaxşı qruplaşdırılırsa, belə hesab etmək olar ki, onlar kvadratik asılılıqla təsvir olunur. Ancaq bu zaman nəzərdə tutmaq lazımdır ki, x xəta ilə müəyyən olunur və kvadrata yüksəldiləndə xəta artır və düz xətt ətrafında səpələnmə daha da çoxalır və beləliklə, xəta effektinin «güclənməsi» baş verir. Xətanı «söndürmək» üçün loqarifmləyək.

$$\lg y = \lg \alpha_1 + 2 \lg x$$

$\lg y - \lg x$ koordinatlarında yenə də düz xətt alınacaqdır, lakin x və y-in təyin olunmasında xəta loqarifmləmə hesabına «sönür». Belə ki, məsələn, $x_1 = 20$ götürək. Biz, x-in təyin olunmasında hətta 2 dəfə səhv etsək, yəni $x_2 = 40$ olsa, $\left(\frac{x_2^2}{x_1^2}\right)$ nisbəti 4dəfə fərqlənəcək, $\frac{\lg 40 - \lg 20}{\lg 20}$ isə cəmisi 0,3 dəfə fərqlənir, yəni loqarifmləmə bu halda xətanın azaldılmasına uyğun gəlir və maneəyə dayanıqlı üsul adlanır. $\frac{y}{x} = \alpha_3 + \alpha_4 x$ şəklində göstərilə bilən üçüncü asılılığa baxaq. x və $\frac{y}{x}$ koordinatlarında düz xətt alınır. Səhvlərin güclənməsi baş vermir, $\frac{y}{x}$-ə birinci halda deyilən bütün sözlər aiddir.

Diferensial tənlik yazılandan sonra üyğun başlanğıc və sərhəd şərtlərini vermək və həllin varlıq və yeganəliyi məsələsinə baxmaq lazımdır. Ali riyaziyyatın uyğun kurslarında isbat olunur ki, şərtlər üzərinə qoyulmuş bəzi məhdudiyyətlər daxilində adi diferensial tənlik üçün Koşi məsələsinin həlli var və yeganədir. İki və yüksək dərəcəli diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsinin həlli ilə yanaşı, axtarılan həllər üzərinə qoyulan şərtlər, parçanın uclarında verilən və həlli verilmiş parçanın daxilində axtarılan sərhəd məsələləri də böyük maraq doğurur. Belə sərhəd məsələləri üçün axtarılan həllin və ya onun törəməsinin qiymətləri, ümumi halda isə bu qiymətlərin xətti kombinasiyası tədqiq olunan parçanın uclarında verilir. Belə hallarda sərhəd məsələsinin yeganə həlli ola bilər, həlli olmaya da bilər. Qeyd olunanları adi və xüsusi törəməli diferensial tənliklərə aid misallarla göstərək.

23-cü misal. Tutaq ki,

$$x'' + \omega^2 x = 0 \qquad (1)$$

diferensial tənliyi verilmişdir və aşağıdakı şərtlər ödənilir:

$$t = 0\text{-da} \quad x = A; \qquad t = \frac{\pi}{\omega}\ \text{-da} \quad x = -A\text{-dır.}$$

Verilmiş tənliyin ümumi həlli

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \qquad (2)$$

olar, burada c_1 və c_2 – ixtiyari sabitdir.

Bu hal nöqtənin elastiki qüvvənin təsiri altında ideal mühitdə sərbəst rəqsinə uyğun gəlir (xarici qüvvələrin təsiri olmadan, yəni sürtünmədən). Lakin bizi (1) tənliyinin ümumi həlli deyil, onun verilmiş sərhəd şərtlərini ödəyən xüsusi həlli maraqlandırır. Birinci sərhəd şərtinin $\left(x/_{t=0} = A\right)$ ödənilməsindən

$$x/_{t=0} = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = A$$

alarıq.

İkinci sərhəd şərtinin $\left(x_{t=\frac{\pi}{\omega}} = -A\right)$ ödənilməsindən isə

$$x/_{t=\frac{\pi}{\omega}} = c_1 \cos \omega \frac{\pi}{\omega} + c_2 \sin \omega \frac{\pi}{\omega} = c_1 \cos \pi + c_2 \sin \pi =$$

$$= c_1(-1) + c_2 \cdot 0 = -c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = -A$$

alarıq.

Buradan $c_1 = A$ alarıq və axtarılan həll

$$x = A \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \qquad (3)$$

şəklində alınar. Yəni (1) tənliyinin sonsuz sayda həlləri vardır (c_2 ixtiyari sabitdir).

24-cü misal. Tutaq ki, (1) tənliyinin

$$t = 0 \quad \text{olduqda} \quad x = 0,$$

$$t = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{olduqda} \quad x = A$$

şərtlərini ödəyən ümumi həlli (2) şəklindədir.

Sərhəd şərtlərinin ödənilməsindən

$$x/_{t=0} = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0 \qquad (4)$$

$$x/_{t=\frac{2\pi}{\omega}} = c_1 \cos 2\pi + c_2 \sin 2\pi = A \qquad (5)$$

alarıq.

Bu sistem ziddiyyətlidir, çünki birinci tənlikdən $c_1 = 0$, ikincidə isə $c_1 = A$ alarıq.

Deməli, bu halda məsələnin həlli yoxdur. Diferensial tənliyin yeganə həllinin olduğu hala baxaq.

25-ci misal. Tutaq ki, maddi nöqtəyə xarici qüvvələr təsir edir, yəni nöqtənin F qüvvəsinin təsiri altında baş verən məcburi rəqsinə baxaq:

$$x'' + \omega^2 x = f, \qquad (6)$$

($f = F/M$, burada M – maddi nöqtənin kütləsidir).

$t = 0$ olduqda, $x = 0$; $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$ olduqda, $x = -1$ olur.

(6) tənliyinin ümumi həlli

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{f}{\omega^2}$$

şəklində olar.

Birinci sərhəd şərtlərinin ödənilməsindən

$$x/_{t=0} = c_1 \cos 0\ \omega t + c_2 \sin 0 + \frac{f}{\omega^2} = 0,$$

və ya

$$c_1 = -\frac{f}{\omega^2}$$

alınır.

İkinci sərhəd şərtinin ödənilməsindən isə

$$x_{t=\frac{\pi}{2\omega}} = c_1 \cos \frac{\pi}{2} + c_2 \sin \frac{\pi}{2} + \frac{f}{\omega^2} = -1,$$

və ya

$$c_2 + \frac{f}{\omega^2} = -1$$

alınır. Buradan

$$c_2 = -\left(1 + \frac{f}{\omega^2}\right)$$

alarıq.

Beləliklə, (6) tənliyinin xüsusi həllini

$$x = -\frac{f}{\omega^2}\cos\omega t - \left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right)\sin\omega t \qquad (7)$$

şəklində alarıq, yəni bu halda həll yeganədir.

ω^2 -nın hansı qiymətlərində

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

$$x(t_1) = 0, \qquad x(t_1 + \pi) = 0 \qquad (8)$$

sərhəd məsələsinin müxtəlif həlləri ola bilər?

Qeyri-fiziki hal: tutaq ki, $\omega^2 < 0$, onda ümumi həll

$$x = c_1\, ch\sqrt{-\omega^2}\; t + c_2\, sh\sqrt{-\omega^2}\; t \qquad (9)$$

şəklində olar.

(8) sərhəd şərtlərini nəzərə alsaq, ixtiyari c_1 və c_2 sabitlərinə görə birinci dərəcəli cəbri sistemi alarıq:

$$x/_{t=t_1} = c_1\, ch\sqrt{-\omega^2}\, t_1 + c_2\, sh\sqrt{-\omega^2}\, t_1 = 0$$

$$x_{t=t_2} = c_1\, ch\sqrt{-\omega^2}\,(t+\pi) + c_2\, sh\sqrt{-\omega^2}\,(t_1+\pi) = 0 \qquad (10)$$

Bu sistemin determinantı

$$\Delta = ch\sqrt{-\omega^2}\; t_1 \cdot sh\sqrt{-\omega^2}\,(t_1+\pi) - sh\sqrt{-\omega^2\; t_1}$$

$$ch\sqrt{-\omega^2}\cdot(t_1+\pi) = sh\sqrt{-\omega^2}\cdot\pi$$

sıfırdan fərqlidir, ona görə də bu sistemin sıfırdan fərqli yeganə həlli var.

Tutaq ki, $\omega^2 = 0$, onda (8) diferensial tənliyinin ümumi həlli

$$x = c_1 + c_2\, t \tag{11}$$

şəklində olar.

Sərhəd şərtlərinin ödənilməsində aşağıdakı sistemi alarıq:

$$\begin{cases} c_1 + c_2\, t_1 = 0 \\ c_1 + c_2\, (t_1 + \pi) = 0 \end{cases}$$

Buradan $c_1 = c_2 = 0$, yəni verilmiş məsələnin eyniliklə sıfıra bərabər olan ($x = 0$) həlli var ki, bu da tamamilə təbiidir və Nyutonun birinci qanununa uyğun gəlir, belə ki, maddi nöqtəyə xarici qüvvələr təsir etmir.

$\omega^2 > 0$ olduqda (8) diferensial tənliyinin ümumi həlli

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

şəklində olar və sərhəd şərtlərinin ödənilməsindən

$$\begin{cases} c_1 \cos \omega t_1 + c_2 \sin \omega t_1 = 0 \\ c_1 \cos \omega (t_1 + \pi) + c_2 \sin \omega (t_1 + \pi) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

alarıq.

Buradan da

$$\Delta = \cos \omega t_1 \sin \omega (t_1 + \pi) - \cos \omega (t_1 + \pi) \sin \omega t_1 = \sin \omega \pi$$

tapırıq.

ω tam ədəd deyilsə, $\Delta \neq 0$ olar və (8) diferensial tənliyinin eynilik kimi sıfıra bərabər yeganə həlli var ($x = 0$). Əgər ω – tam ədəddirsə, (ω = 1, 2, 3, . . .) onda $\sin \omega (t_1 + \pi)$ və $\cos \omega (t_1 + \pi)$ $\sin \omega t_1$-dən və $\cos \omega t_1$-dən $(-1)^k$ (k = 1, 2, 3, . . .) vurğu ilə fərqlənirlər və onda c_1 və c_2 ixtiyari sabitlərinə nəzərən birinci dərəcəli cəbri tənliklər sistemi

$$c_1 \cos kt_1 + c_2 \sin kt_1 = 0 \tag{14}$$

şəklində bir tənliyə gətirilir.

Əgər $c_1 = -B\sin kt$ və $c_2 = B\cos kt$ qəbul etsək, diferensial tənliyin ümumi həlli

$$x = B\sin k\left(t - t_1\right) \qquad (15)$$

şəklinə gətirilir.

Yəni məsələnin sonsuz sayda həlləri vardır.

25-ci a misalı. $k = k\ (T)$ asılılığını nəzərə almaqla F mənbəli sahədə temperaturun stasionar paylanması halı üçün həllin varlıq və yeganəliyinə baxaq.

Onda

$$\frac{d}{dx}\left[k\left(T\right)\frac{dT}{dx}\right] + \frac{\Gamma}{x}k\left(T\right)\frac{dT}{dx} + F\left(x, T, \frac{dT}{dx}\right) = 0\,, \qquad (1)$$

burada istiliyin düzxətli, müstəvi radial və sferik yayılmasından asılı olaraq $\Gamma = 0, 1, 2$ olur.

$$F\left(x, T, 0\right) \le 0$$

$$\left| T'\left(k'\,T' + x^{-1}\Gamma k\right) + F\left(x, T, T'\right)\right| \le c\left(x, T\right)\left[1 + \left(\Gamma'\right)^2\right] \quad (2)$$

$$\left(T'\right)^2\left[kk'' - \left(k'\right)^2\right] - k'\,F\left(x, T, T'\right) + k\left(T\right)\frac{\partial F}{\partial t} \le 0 \qquad (3)$$

bərabərsizlikləri ödənildikdə məsələnin $T\,(a) = T_1$, $T\,(b) = T_2$ şərtini ödəyən həlli var və yeganədir.

(1) tənliyindən

$$T'' = f\left(x, T, T'\right) = -k^{-1}\left(T\right)\left\{T'\left[k'\,T + x^{-1}T\,k\right] + F\left(x, T, T'\right)\right\} (4)$$

alarıq,

burada $f\left(x, T, T'\right)$ $G\left(0 < x < \infty,\ -\infty < T,\ \ T' < \infty\right)$ oblastında təyin olunub və kəsilməzdir, hər bir məhdud $G_1 \subset G$ oblastında onun $\frac{\partial f}{\partial T}$ və $\frac{\partial f}{\partial T}$ xüsusi törəmələri sonludur;

$C\,(x, T)$ kəsilməz funksiyadır.

(2) və (3) bərabərsizlikləri varlıq teoremindən, (4) tənliyi isə yeganəlik teoremindən alınmışdır.

(3) münasibətini (K. N. Bernşteyn şərtini) «sanki» zərurilik adlandırırlar.

$T(0) = 0$, $T(1) = T_2$ şərti daxilində $T'' = (T')^{2+m}$ tənliyinə baxaq, $m > 0$. $k = const$ və $F = (T')^{2+m}$ qəbul etsək, $k\,(T')^{2+m} \le c\,(x, T)\left[1 + (T')^2\right]$ alarıq.

Deməli, 3 şərti pozulur. Yəni $T_2 > \frac{1}{m}(1+m)^{\frac{m}{1+m}}$ olduqda həlli yoxdur.

$$T'' = \left[1 - (T')^2\right], \quad T(0) = 1, \quad T(1) = 0.$$

Sərhəd məsələsinin həlli yoxdur, çünki onun

$$T(x) = -x + c_2 + \ln\left(l^{2c_1} - l^{2k}\right)$$

ümumi həlli olsa da, sərhəd şərtlərindən sabitləri təyin etmək mümkün deyildir. Həmin sərhəd məsələsini, ümumi həlldən alına bilməyən $T = 1 - x$ həlli ödəyir. Həmin həll $T''(0) = 0$ tənliyini ödəyir.

(2) – (4) bərabərsizlikdən $k = const = k_0$ halı üçün aşağıdakı məhdudiyyətlər alınır.

F mənbə funksiyasında temperaturun ikinci dərəcədən yüksək törəməsi olmalıdır, ən yaxşısı $F(x, T, T') = F(xT)$ olmasıdır.

Onda (3) şərti asanlıqla ödənilir.

$$\left[T'\,x^{-1}\,F\,k_0 + F\,(x, T)\right] \le c\,(x, T)\left[1 + (T')^2\right]$$

$$F\,(x, T) \le \frac{\partial F}{\partial T} \le 0.$$

(4) şərti

$$k'' \le 0\,, \quad k' \ge 0\,, \quad T' < 0\,, \quad F \ge 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial T} \le 0\,; \qquad (5)$$

$$k'' \le 0, \quad k' \le 0, \quad T > 0, \quad F \le 0, \quad \frac{\partial F}{\partial T} \le 0. \qquad (6)$$

şərtləri daxilində ödəniləcəkdir.

Xüsusi hallar aşağıdakılardır:

$$F = A + BT, \quad F = F_0 e^{cT}.$$

Bu halda (3) şərti (2) və (4) şərtləri üçün ödənilir.

$k = k\,(T)$ xətti asanlığı üçün (3) bərabərsizliyi (5) və (6) şərtləri daxilində ödənilir.

26-cı misal. İstilikkeçirmə tənliyi üçün Koşi məsələsi həllinin yeganəliyini göstərək (34-cü misala bax)

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = -\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} \quad * \qquad (16)$$

tənliyinin

$$T_i(x, 0) = f(x), \qquad (17)$$

$$T_i(x, 0) = f_1(t), \qquad (18)$$

$$T_i(l, t) = f_2(t), \qquad (19)$$

və ya

$$T\,(x, 0) = f(x), \qquad (29)$$

$$\frac{\partial T_i(0, t)}{\partial x} = f_3(t), \qquad (21)$$

$$\frac{\partial T_i(l, t)}{\partial x} = f_4(t), \quad (i = 1, 2) \qquad (22)$$

şərtlərini ödəyən həllin yeganəliyini isbat edək.

Fərz edək ki, (16) tənliyinin T_1 və T_2 həlləri var, yəni T_1 və T_2 (16) tənliyini, (17 – 19) və (20 – 22) şərtlərini ödəyir.

---

* Sadəlik üçün $\partial T / \partial t = a^2 \partial^2 T / \partial V^2$ istilikkeçirmə tənliyində a^2 əmsalını vahidə bərabər qəbul edirik (uyğun ölçü vahidi sistemində belə ki, Sİ sistemində – m^2/san).

$V = T_1 - T_2$ funksiyasını daxil edək, onda (16) tənliyini və (17) – (22) başlanğıc şərtlərini aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \tag{23}$$

$$V\ (x, 0) = 0, \tag{24}$$

$$V\ \ (0, t) = 0, \tag{25}$$

$$V\ (l, t) = 0, \tag{26}$$

və ya

$$V\ (x, 0) = 0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial V\,(0, t)}{\partial x} = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial V\,(l, t)}{\partial x} = 0 \tag{29}$$

(23) tənliyinin hər iki tərəfini V-yə vurub inteqrallasaq

$$\int_0^1 V\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{T}}\,dx = \int_0^1 V\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx \tag{30}$$

alarıq.

(30)-un sol tərəfinin şəklini dəyişək:

$$\int_0^1 V\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{T}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial t}\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 V^2 dx$$

(30) bərabərliyinin sağ tərəfinə hissə-hissə inteqrallama qaydasını tətbiq etmək üçün

$$И = \frac{\partial V}{\partial x},\ \ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial И}{\partial x} \qquad d\upsilon = \frac{\partial V}{\partial x}dx = dV$$

işarələrini qəbul edək,

onda

$$\int_0^1 V\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx = \frac{\partial V}{\partial x}V\ \Big|_0^1 - \int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx$$

alarıq.

(25 – 26) şərtlərinə və ya törəmə verilmiş (28 – 29) şərtlərinə uyğun olaraq

$$V\frac{dV}{dx}\ \Big|_0^1 = V(l,t)\frac{\partial V(l,t)}{\partial x} - V(0,t)\frac{\partial V(0,t)}{\partial x} = 0$$

alarıq.

Onda

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 V^2 dt = -\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx$$

olar.

$$\int_0^1 V^2 dx = G \quad (G \geq 0).$$

qəbul edək.

$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \geq 0$ olduğundan, $\frac{\partial G}{\partial t} \leq 0$ və G azalan və mənfi olmayan funksiyadır və

$$G_i(0) = \int_0^1 V^2(x,0)\,dx$$

Verilmiş G funksiyası azalan olduğundan (24 – 27) şərtlərinə görə $G(0) = 0$, deməli, eyniliklə sıfıra bərabərlik halı olmalıdır, yəni $G \equiv 0$, bu da V funksiyasının eyniliklə sıfıra bərabər halına uyğun gəlir, yəni $T_1 = T_2$. Deməli, istilikkeçirmə tənliyi üçün Koşi məsələsinin həlli yeganədir.

27-ci misal. Dalğa tənliyi həllinin yeganəliyini isbat edək (35-ci misala bax).

$$\frac{\partial^2 И_i}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial_2 И_i}{\partial x^2} \tag{31}$$

dalğa tənliyinin

$$И_i\ (x, 0) = f_1(x), \tag{32}$$

$$\frac{\partial И_i\ (x, 0)}{\partial t} = f_2(x), \tag{33}$$

$$\upsilon_1\,(0,t) = f\,(t). \tag{34}$$

$$\upsilon_1\,(l,t) = f_4(t) \quad (i = 1, 2) \tag{35}$$

baxaq.

Şərtlərini ödəyən həllinin yeganəliyini isbat edək. Sadəlik üşün burada yuxarıda olduğu kimi a^2 əmsalı (qəbul olunmuş ölçü sisteminə uyğun) 1-ə bərabər olunur.

Yenə də iki υ_1 və υ_2 həllərinin olduğu fərz edilir.

Əvvəlkinə analoji olaraq $V = \upsilon_1 - \upsilon_2$ fərqini götürək, onda (31 – 35) aşağıdakı şəkildə yazılar:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t} = \frac{d^2 V}{\partial x^2}, \tag{36}$$

$$V\,(x,\ 0) = 0, \tag{37}$$

$$\frac{\partial V\ (x, 0)}{\partial t} = 0, \tag{38}$$

$$V\,(0,\ t) = 0, \tag{39}$$

$$V\,(l,\ t) = 0, \tag{40}$$

Bir dəfə riyaziyyatçılardan biri belə fikir söylədi ki, şagirdlərdə riyazi bacarığın əmələ gəlməsinin bir əlaməti belədir: ona tam kvadrata qədər tamamlama üsulu ilə kvadrat tənliyi həll etməyi izah edəndə, onda bu üsulu yüksək tərtibli tənliklərin (məsələn, kubik) həllində tətbiq etmək olarmı sualı meydana çıxır.

Bu qeyd ümumiləşdirmə bacarığının aşkara çıxarılmasıdır, baxılan halda isə müxtəlif halları təsvir edən tənliklərə eynilə yanaşma axtarılır. Burada istər-istəməz zehnin bir tərifi yada düşür: insanın «eyni» proseslər arasındakı fərqi və müxtəlif proseslər arasındakı oxşarlığı görmə qabiliyyəti.

Bundan qabaqkı misala istinad edərək $\frac{\partial V}{\partial t}$-ni W ilə işarə edək, onda sol tərəf $\frac{\partial W}{\partial t}$ kimi yazılır. Əvvəlki isbata analoji olaraq (31) tənliyinin hər iki tərəfini W-yə vuraq. Qeyd etdiyimizi nəzərə alsaq, (36) tənliyi

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} dx = \int_0^1 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} dx$$

şəklində yazılar.

Sol tərəfi açaq:

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial V}{dt} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2}{\partial t} dx = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 dx$$

Sağ tərəfi açaraq:

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} dx = \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial t} d\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \qquad \text{alırıq.}$$

Hissə-hissə inteqrallama üsulunu tətbiq edək:

$$И = \frac{\partial V}{\partial t} \qquad d\upsilon = d\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

$$dИ = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) dx = \frac{\partial^2 V}{\partial x dt} dx \qquad \upsilon = \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\int_0^1 \frac{\partial V}{\partial t} d\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial x} \Bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial^2 V}{\partial x dt} dx =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_0^1 - \frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx\,^*$$

(39 – 40) şərtlərindən

$$\frac{\partial V\ (0,t)}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial V\ (i^*,t)}{\partial t} = 0$$

alarıq.

Onda

$$\frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_0^1 = \frac{\partial V\ (l,t)}{\partial t}\ \frac{\partial V\ (l,t)}{\partial x} = \frac{\partial V\ (0,t)}{\partial t}\ \frac{\partial V\ (0,t)}{\partial x} = 0$$

olar.

Bu, parçanın uclarında funksiyanın özünün əvəzində onun törəmələri verilən hal üçün də doğrudur:

$$\frac{\partial V\ (0,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{və} \quad \frac{\partial V\ (l,t)}{\partial x} = 0.$$

Beləliklə,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx,$$

buradan

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx = 0$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1\left[\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] dx = E$$

işarə edək. Burada E – tam enerjidir.

$$^* \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x dt}\, dx = \int_0^1 \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial \upsilon^2}{\partial t}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \upsilon^3 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 dx$$

Onda $\frac{dE}{dt}=0$ və $E=const$ alarıq. Yəni tam enerji sabitdir. Baxılan halda sürtünmə olmadığından təbii olaraq enerji səpələnməsi (dissipasiya) baş vermir və termodinamikanın birinci başlanğıcına görə tam enerji sabit qalmalıdır.

Eyni zamanda (37)-dən $\frac{\partial V\,(x,0)}{\partial x}=0$ alırıq, (38)-i nəzərə alsaq,

$$E(0)=\frac{1}{2}\int_0^1\left\{\left[\frac{\partial V\,(x,0)}{\partial t}\right]^2+\left[\frac{\partial V\,(x,0)}{\partial x}\right]^2\right\}dx=0$$

yaza bilərik. Nəticədə $E\equiv 0$ olur.

(31) tənliyinin həllini, 2 dəfə diferensiallanan, kəsilməyən funksiya, mənfi olmayan funksiyaların inteqralı şəklində ifadə olunan tam enerji,

$$\left(\left[\frac{\partial V(x,0)}{\partial t}\right]^2\geq 0 \quad \text{və} \quad \left[\frac{\partial V(x,0)}{\partial x}\right]^2\geq 0\right)$$

t ixtiyari zaman anında, sıfra bərabər olduğundan $\frac{\partial V}{\partial t}$ və $\frac{\partial V}{\partial x}$ xüsusi törəmələri eynilik kimi sıfra bərabərdirlər.

Deməli, V x-dən və t-dən asılı olmayan sabitlərdir. (37)-yə görə başlanğıc anda o sıfır olduğundan, eynilik kimi sıfır olacaqdır, yəni $\upsilon_1\equiv\upsilon_2$.

Təbiət elmlərində tez-tez mikroskopik analogiyaya əsaslanan obrazlı mülahizələrə rast gəlinir. Bunu bir neşə misalda nəzərdən keçirək.

28-ci misal. Məlumdur ki, mayenin boruda hərəkəti zamanı laminar və turbulent rejimlər mövcuddur. Bir rejimdən digər rejimə keçid Reynolds ədədi ilə müəyyən olunur. Reynolds açdığı kriteriyanın fiziki mənasını öz şagirdlərinə aşağıdakı

kimi izah etmişdir. Mayeni əsgər sırasına bənzətmək olar, laminar axını nizamlı, turbulent axını isə nizamsız qoşun sırasına bənzəyir. Mayenin υ sürəti və borunun d diametri uyğun olaraq dəstənin sürəti və qoşun dəstəsindəki əsgərlərin sayıdır, mayenin özlülüyü μ intizam, sıxlığı ρ isə silahlanmadır. Əsgərin sayı, onun hərəkət sürəti çox olduqda silahlanma çətin gedir, sıra, cərgə tez pozulur. Mayenin sürəti və sıxlığı çox, özlülüyü isə az, həmçinin borunun diametri böyük olduqca mayedə turbulentlik bir qədər tez alınır. Beləliklə, $\mathrm{Re} = \dfrac{\upsilon d \rho}{\mu}$ Reynolds ədədidir. Qeyd edək ki, yaddaşa da kömək etmək lazımdır. Xüsusi halda buna mnemonik adlanan qaydalardan istifadə etmək kömək edir. Məcazi olaraq mnemozina (qədim yunan yaddaş allahı) – yaddaş deməkdir. Şairlər bu təsvirdən tez-tez istifadə edirlər (Onun dərdini çəkməkdə Mnemozina əridi. A. S. Puşkin. Qafiyə səslənmənin rəfiqəsidir.). Bu halda Reynolds ədədi üçün mnemonik qayda belədir, ve-d-ro? metroya. π ədədini yadda saxlamaq üçün belə qayda var: mən dairə haqqında nə bilirəm. Bu sözlərdəki hərflərin sayına görə π ədədi düzəldilir (yəni 3,1416).

Yadda saxlamaq üçün bəzən ərəb cəbri adlandırılan başqa bir misala baxaq. Müsbət işarəsi altında – dost (müsbət latınca – çox); mənfi işarəsi altında – düşmən (mənfi latınca – az) başa düşülür. Dostumun dostu mənim də dostumdur. Cəbri dildə – müsbət ədədin müsbət ədədlə hasili müsbətdir. Yəni (+) × (+) = (+). Düşmənimin dostu mənim də düşmənimdir. (+) × (–) = (–). Düşmənimin düşməni mənim dostumdur. (–) × (–) = (+). Dostumun düşməni mənim də düşmənimdir. (–) × (+) = (–).

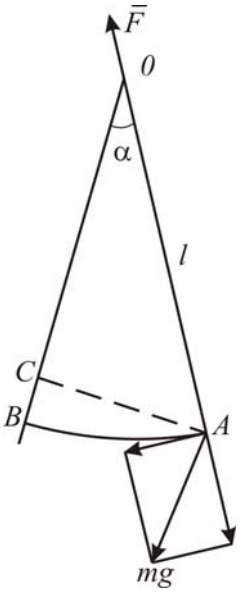
0˚, 30˚,45˚, 60˚ və 90˚ bucaqlarının sinus və kosinuslarını təyin etmək üçün mnemanik qayda da müəyyən maraq kəsb edir, aşağıdakı cədvəl tərtib edilir.

22-ci cədvəl

	0	30	45	60	90
sin χ	0	1	2	3	4
	0	1/2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	4	3	2	1	0

Tutaq ki, sin 45˚-ni tapmaq lazımdır. Cədvələ görə 45˚-yə 2 ədədi uyğun gəlir. 2-dən kvadrat kök alınır və 2-yə bölünür, yəni $\sqrt{2}/2$, sıfır üçün $\sqrt{0}/2=0$; 30˚ üçün $\sqrt{1}/2=1/2$; 45˚ üçün $\sqrt{2}/2$; 60˚ üçün $\sqrt{3}/2$ və nəhayət 90˚ üçün $\sqrt{4}/2=1$. Kosinus üçün bucaq artdıqca bucağın qiymətləri azalır. Belə ki, 0˚ üçün $\sqrt{4}/2=1$, 30˚ üçün $\sqrt{3}/2$, 45˚ üçün $\sqrt{2}/2$; 60˚ üçün $\sqrt{1}/2=1/2$ və 90˚ üçün $\sqrt{0}/2=0$.

Triqonometrik funksiyaların işarələrini təyin etmək üçün funksiyalar sıra ilə yazılır (sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans, kosekans) və belə qaydadan istifadə olunur. Uclardan bərabər məsafədə olan funksiyalar eyniişarəlidir, eləcə də sxemə görədir. Sinus üfüqi xətt boyunca (17-ci şəkil), kosinus şaquli xətt boyunca, tangens – diaqonal boyunca müsbətdir. Vurmada da yadda saxlamaq üsulu vardır. Misal üçün 9-lardan ibarət iki eyni ədəd bir-birinə vurulursa, onda axırda vahid ədədi, ondan sonra vurulan ədədlərdə olan 9-ların sayından bir əskik sayda sıfırlar yazılır, sonra 8 və ondan sonra sıfırların sayı qədər 9-lar yazılır (999 × 999 = 998001).



17-ci şəkil.

Əgər ancaq vahidlərdən düzəldilmiş iki eyni ədəd vurulursa, onda ortada vurulan ədədlərdəki vahidlərin sayına uyğun ədəd yazılır. Sonra bu ədəddən solda və sağda vahidə qədər azalan ədədlər yazılır. Belə ki, 1111 × 1111-ə vurulursa, 1234321 alırıq. Sinxronlaşdırma anlayışına aid mülahizələri davam etdirək. Əgər sıradakılar yorulublarsa, yol pisdirsə və mahnı oxumaq əhvali-ruhiyyəsi yoxdursa sıranın nizamı pozulur, əgər komandir tərəfindən dəqiq göstərişlər verilərsə, sırada yaxşı oxuyan tapılıbsa, addımlar düzəlir, yolun hamarsızlığı az gözə görünür, gediş asanlaşır. Mürəkkəb böyük sistemin bu obrazlı misalı çoxlu kiçik sistemlər rəqsinin sinxronlaşdırılması prinsipi əsasında təşkil olunmuşdur. Belə böyük sinxron sistem klaster təşkil edir (klaster – ümumi əlamətinə görə birləşmə deməkdir). Addımın sinxronlaşdırilması ümumi komanda, yoldaşın hissiyyatı və ümumi mahnı hesabına həyata keçirilir. Ancaq insanları həmişə

zamanla ayaqlaşmağa məcbur etmək olmur. Burada ən əsaslı odur ki, hər bir şəxs verilmiş tezlikli və amplitudlu addımla irəliləsin. Sırada yaşlı və kiçiklər varsa, onda sinxronlaşdırma ümumiyyətlə mümkün deyil. Yolda əyriliklər çoxdursa, yaxşı mahnı da varsa, addımın sinxronlaşdırılması tez-gec pozulacaqdır. Deməli, sırada gedənlərin identivliyi ilə bərabər, xarici maneələrin səviyyəsinin aşağı olması zəruridir. Bu deyilənlərin əsasında sinxronlaşdırma anlayışına tərif vermək olar. Əgər iki periodik prosesin tezlikləri bir-birinə bərabər və ya biri o birinin misli olursa və vaxt keçdikcə fəza dəyişmələri sabit qalırsa, onda bu iki proses sinxron proses olur.

N. Viner qeyd etmişdir ki, avtorəqs sistemləri öz aralarında əlaqələndirilirsə, onlar öz-özünə avtomatik qarşılıqlı sinxronlaşa bilirlər. Kanadada dovşanların və vaşaqların qarşılıqlı əlaqə misalını gətirək. Vaşaqlar dovşanla, dovşanlar isə miqdarı məhdud olmayan otla qidalanırlar. Vaşaqların sayının artması ilə təbii olaraq dovşanların miqdarı azalır və nəticədə vaşaqların sayının azalmasına gətirib çıxarır. Deyilənlər dovşanların miqdarının artmasına, bu isə öz növbəsində vaşaqların artmasına və s. səbəb olur. Bu iki heyvanların sayının dəyişməsi mülahizəsi bir-birilə çaylar və göllərlə ayrılan adalarda aparılan uzun müşahidə nəticəsində müəyyən edilmişdi.

Adaların bir-birilə heç bir əlaqəsi olmadığı hala baxaq. Onda bu adaların hər birində bu iki növ heyvan sayının dəyişməsi asılı olmayan faza tezlikli titrəyişlə baş verir. Orta hesabla bütün sahə üzrə hiss ediləcək hər hansı vaxtaşırı bir proses deyil, orta səviyyədən təsadüfi fərqlənmələr ola bilərdi. Əgər heyvanların bir hissəsi bir adadan o biri adaya keçə bilirsə, yəni qarışa bilirlərsə, onda heyvanların sayının dəyişmə prosesi sinxronlaşar və müəyyən müddətdən sonra hər iki növ heyvanın sayı Kanada ərazisinin bütün sahələrində sinxron dəyişə bilər.

29-cu misal. Plankın kvant qanunauyğunluqları ilə zəif mikroskopik titrəyişli proseslər arasında olan Erenfest-most analogiyası böyük maraq kəsb edir. Yükünün kütləsi m, başlanğıc anda bucaq amplitudu α_0 olan riyazi rəqqasın kiçik rəqslərinə baxaq (17-ci şəkil). Rəqqasın sonu blokdan keçirilir və qarmağın uzunluğu F qüvvəsinin təsiri altında az dəyişir. Kiçik rəqslərdə $\sin\alpha \approx \alpha$ götürmək olar. Kafi qədər böyük rəqs dövrlərində rəqslərin tezliyi hiss olunan dərəcədə dəyişdikdə, qarmağın uzunluğunun tədricən azalması baş verir. Nyutonun ikinci qanununa görə yük üçün

$$F = mg\cos\alpha + \frac{m\upsilon^2}{l} \text{ alırıq,}$$

burada $mg\cos\alpha -$ ağırlıq qüvvəsinin ip istiqamətində proyeksiyasıdır. $\frac{\upsilon^2}{l}$ – ip boyunca təsir edən mərkəzəqaçma təcilidir. Məlumdur ki, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, bu isə təxminən $1 - \frac{\alpha^2}{2}$ -yə bərabərdir, onda

$$F = mg - \frac{1}{2}mg\,\alpha^2 + \frac{m\upsilon^2}{l} \text{ olar.}$$

Kifayət qədər dövrlərdən sonra görülən işi hesablamaq üçün α_1 və υ_1 dəyişən kəmiyyətlərinin orta kvadratik qiymətlərindən istifadə etməklə F_1-in müəyyən qiymətini tapmaq lazımdır. Bucaq 0-dan α-ya, yükün sürəti 0-dan υ_0-a qədər dəyişdiyindən $\alpha_1^2 = \frac{\alpha_0^2}{2}$, $\upsilon_1^2 = \frac{\upsilon_0^2}{2}$ olar. $\alpha - \alpha_1$, $\upsilon - \upsilon_1$, $F - F_1$ –ləri nəzərə alsaq,

$$F = mg - \frac{1}{4}mg\,\alpha_0^2 + \frac{m\upsilon_0^2}{2l} \text{ alarıq.}$$

Enerjinin saxlanması qanunundan istifadə edək. $\alpha = \alpha_0$ –a uyğun maksimal vəziyyətdə kinetik enerji $\frac{m\upsilon_0^2}{2}$ -yə bərabərdir. $\alpha = 0$ olduqda potensial enerji mg -ə bərabərdir.

$$CB = OB - OC = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha) \approx \frac{ld^2}{2},$$

onda enerjinin saxlanması qanuna görə:

$$\frac{m\upsilon_0^2}{2} = \frac{mgl\alpha_0^2}{2}, \qquad \frac{m\upsilon_0^2}{2} = mg\alpha_0^2$$

alarıq. Bunları F_1-in ifadəsində yerinə qoysaq,

$$F_1 = mg + \frac{1}{4}mg\alpha_0^2$$

alarıq.

Sistemdə itkini nəzərə almasaq, ipin uzunluğu $\Delta\, l$ – qədər azaldıqda F_1 – qüvvəsinin gördüyü işi təyin etmək olar: yəni $F_1\,\Delta\, l$, onda

$$-F_1\Delta l = -mg\,\Delta i - \frac{1}{4}mg\ {}_0\Delta\, l \quad \text{alarıq.}$$

Birinci hədd nöqtə ağırlıq qüvvəsi sahəsində qaldırıldıqda potensial enerjinin artması nəticəsində sistemin potensial enerjisinin artmasına uyğun gəlir. İkinci hədd isə rəqqasın rəqs enerjisinin ΔA dəyişməsinə uyğun gəlir, yəni

$$\Delta A = -\frac{1}{4}mg\alpha_0^2\Delta l.$$

Rəqqasın rəqs hərəkətinin tam enerjisi

$$A = \text{mg} \cdot CB \quad \text{və ya} \quad A = mg\,l\,\frac{{}^2_0}{2} \quad \text{olur.}$$

Enerjinin nisbi dəyişməsi

$$\frac{\Delta A}{A} = -\frac{1}{2}\,\frac{\Delta l}{l} \qquad \text{olacaqdır.}$$

Məlumdur ki, rəqs tezliyi ν * aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$\nu = c\sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad \frac{d\nu}{dl} = \frac{1}{2}\, c\sqrt{\frac{g}{\mu}},$$

yəni

$$\frac{d\nu}{dl} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\nu}{l}$$

Bundan istifadə edərək

$$\frac{\Delta A}{A} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta l}{l} \quad \text{və ya}$$

$$\frac{dA}{A} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{dl}{l} \quad \text{və ya} \quad \frac{A}{\nu} = \frac{dA}{d\nu} \qquad \text{alırıq.}$$

Bu $\frac{A}{\nu} = const$ olduqda mümkündür. Yəni rəqqasın rəqs enerjisi onun uzunliğunun azacıq dəyişmələrində rəqsin tezliyi ilə mütənasibdir. Bu, Plankın rəqs tezliyi ilə enerji arasında olan uyğunluğuna analojidir. Adi rəqslər üçün sabit, rəqqasın parametrlərindən və başlanğıc amplitudundan asılıdır, Plank sabiti isə universaldır. Bu, prinsipcə tamamilə müxtəlif olan proseslər baş verdiyindən belə olur.

Baxılan halda rəqqasın tezliyinin enerjisinin dəyişməsi istənilən qədər hamar və kəsilməz ola bilər. «Sürətli» proseslər üçün isə sistemin enerjisi Plank sabitinin misilləri qədər sıçrayışla dəyişir. Mikroskopik şərtlər üçün Plank sabiti çox kiçikdir və bu sıçrayışlar hiss edilir, enerjinin dəyişməsi təqribən kəsilməz götürülür. Qeyd etmək lazımdır ki, sallanan ipin uzunluğunun azacıq dəyişməsilə enerjinin dəyişməsi rəqsin sabit amplituduna uyğun gəlir. Şərh edilən, Plank

---

* 33-cü misala bax.

sabitinin yeganə sabit rəqs amplitudu olan «atom rəqqasları» şəklində əyani interpretasiyasıdır.

Çoxdəyişənli funksiyaların onun dəyişənləri üzərinə müəyyən məhdudiyyətlər qoymaqla şərti ekstremumun tapılmasının mexaniki interpretasiyasına baxaq.

Mexaniki mənada, maddi nöqtənin hərəkəti zamanı məhdudiyyətlər məsələn, stasionlar əlaqələr ola bilər:

$$f\left(x, y, z\right) = 0 \qquad (1)$$

Tutaq ki, maddi nöqtəyə f – qüvvəsi təsir edir və əlaqə idealdır, yəni sürtünməsizdir. Laqranj teoreminə görə, mümkün $\overline{\delta r}$ dəyişməsi üçün f aktiv qüvvəsinin gördüyü iş sıfra bərabər olacaqdır, yəni

$$\vec{F} \cdot \overline{\delta r} = 0, \qquad (2)$$

və ya

$$F_x\, \delta x + F_y\, \delta y + F_z\, \delta z = 0. \qquad (3)$$

Digər tərəfdən mümkün olan yerdəyişmələr verilən səth üzrə – əlaqələr üzrə baş verir. Onda

$$f\left(x + \delta x;\ \ y + \delta y;\ \ z + \delta z\right) = 0$$

olur.

Teylor sırasına ayırsaq və birinci dərəcəli kiçikləri nəzərə alsaq,

$$f\left(x, y, z\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\, \delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\, \delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\, \delta z = 0$$

alarıq.

(1)-i nəzərə alsaq,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\, \delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\, \delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\, \delta z = 0 \qquad (4)$$

alarıq.

Onda tam diferensial

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz \qquad (5)$$

olacaqdır.

(4) və (5)-i müqayisə etməklə, mümkün dəyişmələrdən birinin həqiqi dəyişmə ilə üst-üstə düşdüyünü asanlıqla ayırd etmək olar. (5)-i

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}=0 \qquad (6)$$

şəklində yazmaq olar.

$$\frac{dx}{dt}=\upsilon_x, \quad \frac{dz}{dt}=\upsilon_z, \quad \frac{dy}{dt}=\upsilon_y,$$

və

$$grad\ f=i\frac{\partial f}{\partial x}+j\frac{\partial f}{\partial y}+k\frac{\partial f}{\partial z},$$

burada υ_x, υ_y, υ_z sürətin Q_x, Q_y, Q_z oxları üzrə proyeksiyalarıdır. (6)-nı

$$grad\ f\cdot\vec{\upsilon}=0 \qquad (7)$$

şəklində yazmaq olar.

(7)-də əsasən f və $\vec{\upsilon}$ vektorlarının skalyar hasili sıfır olduğundan bu vektorlar perpendikulyardırlar. Digər tərəfdən $\vec{\upsilon}$ f $(x, y, z) = 0$ səthinə toxunan istiqamətdə olduğundan $grad\cdot\vec{\upsilon}$-ə perpendikulyardır, yəni səthə normal istiqamətdə yönəlir. (3) və (4)-ü nəzərə alsaq, onları toplama ilə birləşdirmək olar. $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, F_x, F_y, F_z$ -lərdən fərqli ölçülərə malik olduğundan (4)-ü λ – əmsalına vururuq.

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0,$$

Burada λ əmsalı – Laqranjın ölçü vuruğudur.

Beləliklə (3)-ü axırıncı ifadə ilə toplasaq,

$$\left(Fx+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x+\left(Fy+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y+\left(Fz+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z=0 \quad (8)$$

alırıq. $\delta x, \delta y, \delta z$-dən ikisi ixtiyari verilə bilər, yəni xətti asılı deyildirlər, üçüncü isə əlaqə tənliyindən tapılır. Tutaq ki, $.\delta x, \delta y$ ixtiyari verilir. Onda (8)-in ödənilməsi üçün

$$F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad (9)$$

$$F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0, \quad (10)$$

olması zəruridir. Nəticədə

$$F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0, \quad (11)$$

alırıq.

Əgər qüvvə meydanı potensialdırsa (işin diferensialı tam diferensialdır), onda

$$F_x=-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}, \quad (12)$$

$$F_y=-\frac{\partial \upsilon}{\partial y}, \quad (13)$$

$$F_z=-\frac{\partial \upsilon}{\partial z}, \quad (14)$$

alırıq.

(12)-ni (19)-da yerinə qoysaq,

$$\frac{\partial\left(\upsilon-\lambda f\right)}{\partial x}=0 \quad (15)$$

alarıq. Analoji olaraq

$$\frac{\partial\left(\upsilon-\lambda f\right)}{\partial y}=0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial\left(\upsilon-\lambda f\right)}{\partial z}=0 \qquad (17)$$

alınır.

Sərbəst nöqtə halında dayanıqlı tarazlıq şəraitini tapmaq üçün aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi zəruridir:

$$F_x=0,\quad \frac{\partial\upsilon}{\partial x}=0$$

$$F_y=0,\quad \frac{\partial\upsilon}{\partial y}=0$$

$$F_z=0,\quad \frac{\partial\upsilon}{\partial z}=0$$

yəni bu $\upsilon\left(x,y,z\right)$ potensial enerjisinin minimumuna uyğun gəlir. Sərbəst olmayan maddi nöqtənin dayanıqlı tarazlıq şərtini tapmaq üçün (15), (16) və (17)-ə uyğun olaraq məhdudiyyətlər nəzərə alınan yeni $\upsilon_1=\upsilon-\lambda f$ funksiyasının minimumunu tapmaq lazımdır.

$z=x^2+y^2$ funksiyasının, $f\left(x,y\right)=xy-a=0,\left(a>0\right)$ şərti daxilində minimumunu tapın. Məsələni aşağıdakı kimi həll etmək olar:

$$x=\frac{a}{y},\quad z=\frac{a^2}{y^2}+y^2,$$

$$\frac{dz}{dy}=-\frac{2a^2}{y^3}+2y=0,$$

$$y^1=a^2 \quad y=\sqrt{a}\ .$$

Daha mürəkkəb misallarda yoxetmə prosesi o qədər də asan olmur, ona görə də şərti ekstremumun tapılma şərtlərindən istifadə edək:

$$\upsilon_1=x^2+y^2-\lambda\left(xy-a\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x} &= 2x - \lambda y = 0 \\ \frac{\partial \upsilon_1}{\partial y} &= 2y - \lambda x = 0 \\ xy &= a \end{aligned}\right\}$$

Bu üç tənlikdən

$$\lambda = 2, \quad a = \sqrt{a}, \quad y = \sqrt{a}$$

alırıq. Həll, təbii ki, həmin nəticəni verir.

30-cu misal. Müxtəlif ötürmə proseslərini nəzərdən keçirək. Səbəb – araşdırıcı əlaqəni təyin etmək, yəni ötürmə prosesini müəyyən edən və vahid sahədən vahid zaman ərzində keçən maddə miqdarını xarakterizə edən kəmiyyəti tapmaq lazımdır. Həqiqətən, maye borudan laminar rejimdə axırsa, ötürmə xarakteri borunun en kəsiyindən vahid zamanda axan maye miqdarı ilə xarakterizə ediləcəkdir. Bir neçə halları təsəvvür etmək çətin deyil: vahid zamanda eyni miqdarda maye ötürülərsə, hərəkətin müqaviməti borunun diametri ilə təyin olunur, yəni böyük diametrli boruda müqavimət kiçik diametrli borudakı müqavimətə nisbətən azdır. Vahid zaman ərzində sahədən axan maddə miqdarı orta həcmi sürəti müəyyən edir. Əgər maye sıxılmayandırsa, müəyyənedici əsas kəmiyyət vahid uzunluğa təzyiq düşküsü (yəni $\Delta P/L$) olacaqdır. Bu halda ötürmənin səbəbi $\frac{\Delta P}{l}$ kəmiyyəti, nəticəsi – υ olacaqdır. Elektrik cərəyanı üçün ötürmənin səbəbi vahid uzunluğa müvafiq olan potensiallar fərqi $\frac{\Delta P}{l}$, nəticəsi isə vahid zamanda vahid sahədə axan elektrik miqdarı – yəni cərəyanın sıxlığı (υ) olacaqdır. Nüfuzetmə prosesində səbəb vahid zamanda uzunluq qət edən maddə miqdarı (i) olacaqdır. Nəticədə – bu maddə miqdarı, vahid zamanda vahid sahəyə

köçürülən (q_1) olur. İstilikkeçirmə prosesi üçün vahid maddə miqdarı $\left(\frac{\Delta c}{l}\right)$ olacaqdır. İstilikkeçirmə prosesi üçün vahid uzunluğa müvafiq temperaturlar fərqi – səbəb $\left(\frac{\Delta T}{l}\right)$, vahid zamanda sahədən keçən istilik miqdarı, yəni istilik seli q_2 nəticə olar. Gördüyümüz kimi, təbiətcə tamamilə müxtəlif proseslər, eyni qanunla ifadə olunurlar. Nəticəni xarakterizə edən kəmiyyət prosesə səbəbkar kəmiyyətlə düz münasibdir. Deməli, yuxarıda baxdığımız dörd hal belə yazıla bilər:

$$\upsilon = k_1 \frac{\Delta P}{l} \tag{1}$$

$$i = k_2 \frac{\Delta V}{l} \tag{2}$$

$$q_1 = k_3 \frac{\Delta C}{l} \tag{3}$$

$$q_2 = k_4 \frac{\Delta T}{l} \tag{4}$$

Birinci düstur boru hidravliki* üçün Puazeyl qanunu və süzmə prosesi üçün Darsi qanunu, ikinci Om qanunu, üçüncü Fik qanunu və nəhayət dördüncü Fure qanunudur.

Zehnin, idrakın, intellektin yuxarıda verilən tərifinə görə (27-ci misala bax) müqayisə üsulu onun əsas hissəsidir. Bu düsturlar xətti qanunları ifadə edirlər. Doğrudan da, bəzi hallarda, ilk baxışda cüzi əlavələr, qatışıqlıq, maneə bu xətti qanunları pozur və bir sıra yeni effektlərə gətirir. Yaxşı məlum olan Tomson effektinə görə cüzi polimer əlavələri (10^{-5}, 10^{-8} tərtibdən) turbulent rejimdə hidravlik müqavimətin azalması mənasında heyrətləndirici nəticəyə gətirib çıxarır, bəzən isə bu azalmalar ikiqat artır.

---

* 32-ci misala bax.

Akademik R. V. Xoxlovun laboratoriyasında qeyri-xətti optika kimi qeydə alınan məzəli bir «Neoptika» lövhəsi asılmışdır.

Hidravlikada qeyri-xəttilik birinci dəfə Skott tərəfindən müşahidə olunmuş solitonlara (ayrılmış dalğalara) gətirib çıxara bilər. Müqayisə ediləcək dərəcədə dərin olmayan suyun səthi üzrə bir cüt at ilə çəkilən barja dayandırılmış və bu vaxt ondan kafi qədər böyük amplitudlu tənha dalğa ayrılmış və bir mildən artıq məsafə keçmişdir. Soliton köçürmənin başqa qeyri-xətti proseslərində də ola bilər.

x oxu boyunca xətti köçürmə qanunu

$$\upsilon_x = -k_1 \frac{dp}{dx},$$

diferensial şəklində yazaq. Ox boyunca hərəkətdə təzyiq düşdüyündən burada minus işarəsi qoyulmuşdur; yəni $\frac{dp}{dx}$-nin işarəsi mənfidir.

Qeyri-xətti qanun üçün bir ölçülü halda

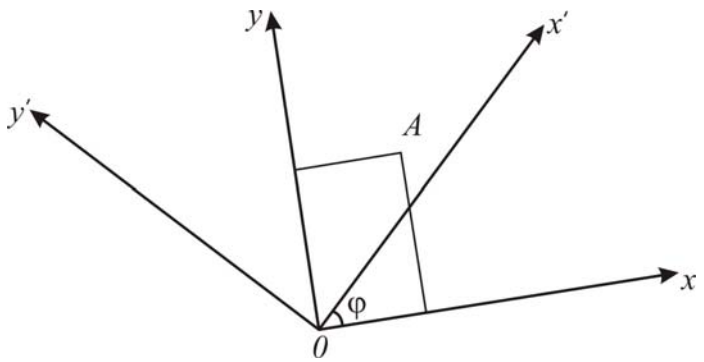
$$\upsilon_x = k_5 \left(-\frac{dp}{dx} \right)^n \tag{5}$$

yazmaq olar.

31-ci misal. Müstəvi hərəkəti halında sürətin υ_k və υ_y komponentləri üçün

$$\upsilon_x = k_5 \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right)^n, \tag{6}$$

$$\upsilon_y = k_5 \left(-\frac{\partial p}{\partial y} \right)^n, \tag{7}$$



18-ci şəkil.

yazmaq olarmı? Burada n – tək ədəddir. Bunun üçün bu düsturların, koordinat oxlarının dönməsinə nəzərən invariant olmasını (qeyri asılılığını) isbat etmək lazımdır.

18-ci şəkildə XOY, $X''OY'$ koord inat sistemləri verilmişdir.

$X''OY'$ sistemi XOY koordinat sisteminin koordinat başlanğıcı ətrafında
φ bucağı qədər dönməsi nəticəsində alınmışdır. A nöqtəsinin XOY sistemindəki koordinatları isə A (x, y)-in koordinatları (x', y') ilə aşağıdakı xətti çevirmə ilə əlaqəlidirlər.

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \tag{8}$$

$$y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi, \tag{9}$$

Bu düsturları 18-ci şəkildən bilavasitə çıxarmaqdan başqa ayrı cür də almaq olar:

$$x = a_1^{(\varphi)} x' + b_1^{(\varphi)} y' \tag{10}$$

$$y = a_2^{(\varphi)} x' + b_2^{(\varphi)} y' \tag{11}$$

$a_1^{(\varphi)}$ və $b_1^{(\varphi)}$-ü tapmaq lazımdır. φ = 0 olduqda (8) – (9)-dan $x = x'$ və $y = y'$ tapırıq, deməli (10) – (11)-in ödənilməsi üçün uyğun olaraq

$$a_1^{(0)} = 1 \quad b_1^{(0)} = 0 \quad \text{və} \quad a_2^{(0)} = 0 \quad b_2^{(0)} = 1$$

olmalıdır; $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ olduqda (8) – (9)-dan $x = -y'$, $y = x'$ alırıq. Deməli, bu halda (10) – (11)-in ödənilməsi üçün uyğun olaraq

$$a_1^{(\pi/2)} = 0, \quad b_1^{(\pi/2)} = -1 \quad \text{və} \quad a_2^{(\pi/2)} = 1, \quad b_2^{(\pi/2)} = 0$$

qəbul edilir.

a_1, a_2, b_1, b_2 triqonometrik funksiyalar olduğunu bilərək, $a_1^{(0)} = 1$, $a_1^{(\pi/2)} = 0$ olduğunu nəzərə alaraq, $a_1 = \cos\varphi$ olduğunu fərz edə bilərik. Anoloji qayda ilə $b_1 = -\sin\varphi$, $a_2 = \sin\varphi$, $b_2 = \cos\varphi$ tapa bilərik.

Aydındır ki, bu mühakimə düsturların çıxarılışı deyil, o ancaq düsturun strukturu və əmsalların xarakteri məlum olduğu halda kömək edə bilər, baxdığımız halda bunlar sin φ, cos φ triqonometrik funksiyalardır və məsələ onların dəqiqləşdirilməsinə gətirilir.

Beləliklə, baxılan misalda son nəticələrdən istifadə edərək əmsalların strukturu və xarakteri məlum olduqda, əmsalları dəqiqləşdirmək olar.

Sürətin x' və y' oxları üzrə proyeksiyalarını υ_k' və υ_y' ilə işarə etsək,

$$\upsilon_x = \upsilon_x' \cos\varphi - \upsilon_y' \sin\varphi$$

$$\upsilon_y = \upsilon_x' \sin\varphi \pm \upsilon_y' \cos\varphi$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x'} \cos\varphi - \frac{\partial p}{\partial y'} \sin\varphi \qquad (12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x'} \sin\varphi + \frac{\partial p}{\partial y'} \cos\varphi$$

alarıq.

Burada $\dfrac{\partial p}{\partial x'}$ və $\dfrac{\partial p}{\partial y'}$ təzyiq qradiyentinin x' və y' oxları üzrə proyeksiyasıdır.

(6) – (7)-ni doğru hesab etsək,

$$\upsilon_x = k_5\left[-\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\cos\varphi - \frac{\partial p}{\partial y'}\sin\varphi\right)\right]^n$$

(13)

$$\upsilon_y = k_5\left[-\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\sin\varphi + \frac{\partial p}{\partial y'}\cos\varphi\right)\right]^n$$

yaza bilərik.

(12) və (13) düsturlarını müqayisə etsək, görərik ki,

$$\upsilon_{x'} = k_5\left(-\frac{\partial p}{\partial x'}\right)^n,$$

$$\upsilon_{y'} = k_5\left(-\frac{\partial p}{\partial y'}\right)^n, \qquad (14)$$

ancaq $n = 1$ olduqda mümkündür, yəni yazılmış invariant deyildir, yəni süzmənin yazılmış qeyri-xətti qanunu x və y oxlarına nəzərən invariant deyildir.

Koordinat oxlarının dönməsinə nəzərən invariantlığını təmin edən qeyri-xətti süzmə qanununun mümkün yazılması yollarından biri aşağıdakından ibarətdir:

$$\upsilon_x = k_5(/\,grad\ P\,/)^{n-1}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad (15)$$

$$\upsilon_y = k_5(/\,grad\ P\,/)^{n-1}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad (16)$$

burada

$$(/\,grad\,/) = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2} = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)^2\cos\varphi -\right.$$

$$\left.-\frac{\partial p}{\partial y'}\sin\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x'}\sin\varphi + \frac{\partial p}{\partial y'}\cos\varphi\right)^2\Bigg]^{1/2} =$$

$$=\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)^2\cos^2\varphi-2\frac{\partial p}{\partial x'}\frac{\partial p}{\partial y'}\cos\varphi\sin\varphi+\left(\frac{\partial p}{\partial y'}\right)^2\sin^2\varphi+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)^2\sin^2\varphi+2\frac{\partial p}{\partial x'}\frac{\partial p}{\partial y'}\sin\varphi\cos\varphi+\left(\frac{\partial p}{\partial y'}\right)^2\cos^2\varphi\right]^{1/2}=$$

$$=\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)^3\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)+\left(\frac{\partial p}{\partial y'}\right)^2\left(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\right)\right]^{1/2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial y'}\right)^2}$$

Beləliklə, qradiyentin modulu koordinat oxlarının dönməsinə nəzərən invariantdır.

Sürətin proyeksiyaları isə aşağıdakı kimi ifadə olunurlar.

$$\upsilon_x=k_5\left[/\,grad\,P\,/^{n-1}\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\cos\varphi-\frac{\partial p}{\partial y'}\sin\varphi\right)\right]$$

$$\upsilon_y=k_5\left[/\,grad\,P\,/^{n-1}\left(\frac{\partial p}{\partial x'}\sin\varphi+\frac{\partial p}{\partial y'}\cos\varphi\right)\right],$$

buradan

$$\upsilon_{x'}=k_5\left(/\,grad\,P\,/^{n-1}\frac{\partial p}{\partial x'}\right)$$

$$\upsilon_{y'}=k_5\left(/\,grad\,P\,/^{n-1}\frac{\partial p}{\partial y'}\right)$$

alınır.

Deməli, (15) – (16) şəklində qeyri-xətti qanun koordinat oxlarının dönməsinə nəzərən invariantdır.

Saat 9°°-da başlanmış fiziki təcrübə 12°°-da son mərhələyə çatmışsa, onda 16°°-da son mərhələyə çatan təcrübə saat 13°°-da başlanmışdır. Beləliklə, fiziki qanunlar köçürmə qanununun invariantlarına aiddirlər.

$ae^{i\omega t}$ və $a\cos\omega t + b\sin\omega t$ funksiyalar ailəsi köçürməyə nəzərən invariantdırlar.

Həqiqətən, $e^{i\omega t}$ funksiyası τ üzərinə t gəlməklə alınan köçürmə zamanı eyni tipli $e^{i\omega(t+\tau)} = e^{i\nu t}$ $e^{i\omega t}$ funksiyasına keçir. Və eləcə də

$$a\cos\omega(t+\tau) + b\sin\omega(t+\tau) = (a\cos\omega t + b\sin\omega\tau).$$

$$\cos\omega t + (b\cos\omega\tau - a\sin\omega t)\cdot\sin\omega t = a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t$$

alırıq.

Təbiidir ki, invariantlıq xassəsinə təkcə triqonometrik funksiyalar malik deyil.

Bu funksiyalar sadə xətti çoxluq təşkil edir ki, bu da verilmiş tezlikli bütün rəqsləri iki rəqslərin xətti kombinasiyasına gətirməyə imkan verir.

Bu xüsusiyyətlər digər oxşar proseslərin (radiotexnika, akustika və s.) elektrik dövrlərinin xəttilik xassələrinin araşdırılmasında harmonik analizin qiymətini təyin edir.

Spektral təsəvvürlərin neft-qazçıxarmanın bəzi texnoloji məsələlərinin həllinə tətbiqini nümayiş etdirmək üçün aşağıdakı misala baxaq.

31-ci a misalı. Müəyyənlik üçün neft verən laya baxaq və müxtəlif quyuların debit spektrkərini müqayisə edək. Adətən, lay üçün aşağı tezliklər, quyular üçün isə yuxarı tezliklər xarakterikdir. Poliakrilamidin tətbiqi zamanı quyular arasındakı su əlaqəsi zəifləyir və mayenin debitinin spektral ayrılışında aşağı tezlikli hədlərin rolu artır. Quyular arasındakı əlaqə koqerent funksiyasına görə (korrelyasiya əmsalının analoqu), eləcə də sistemin tezlik xarakteristikasına (fəza və amplitud

tezlikli) görə qiymətləndirilir. Quyular arasında durğunluq zonası olduğu halda, gecikmə ilə aşağı tezliklərə görə yüksək əlaqə müşahidə olunur.

İşlənilməyən neft kütləsini əhatə edən mədənlərin su debitləri arasında aşağı tezliklərə görə və böyük gecikməli yüksək əlaqə olacaqdır.

Bircins olmayan halda bütün tezliklərə görə koqerentlik funksiyasının aşağı qiymətləri müşahidə ediləcəkdir.

Məşhur fizik məsləhəti diqqətəlayiqdir: «Cavabı bilməmiş heç vaxt hesablamaya başlama! Hər bir hesablamadan qabaq qiymətləndirici hesabat apar. Geniş çıxarış yazmaqdan qabaq sadə fiziki anlayışlar (simmetriya, invariantlıq, saxlama) cəlb et, hər bir tapmaca üçün mümkün olan cavablar fikirləş. Cürətli ol: sənin təklifinlə heç kəsin işi yoxdur. Odur ki, fərziyyəni tez, intuitiv et. Uğurlu fərziyyələr bu intuisiyanı möhkəmləndirir. Səhv fərziyyələr xeyirli sarsıntı verir».

Xüsusi halda, ölçülər analizinin tətbiqi, ölçüsüz dəyişənlərdən istifadə etməklə, dəyişənlərin sayının azaldılmasına imkan verir. Bu, əsasən dəyişənlərin ümumi miqdarının çox olmadığı hala aiddir.

Bizi əhatə edən proseslər mexanikanın, fizikanın və s. uyğun qanunlarına, xüsusi halda, kütlə, enerji və impulsun saxlanması qanunlarına əsasən alınan adi və xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə ifadə olunurlar.

Qara qutu modeli halında, daxilolma və çıxma kəmiyyətləri məlum olduqda diferensial tənlik – obyektin tənliyini qurmaq olar. Bunun üçün giriş qiymətləri həyəcanlandırılır və çıxış qiymətlərinin dəyişmələri ayırd edilir, aparılmış statistik araşdırma, avtokorrelyasiya və qarşılıqlı korrelyasiya funksiyalarının qurulmasına əsaslanaraq obyektin tənliyini qurmağa imkan yaranır. Bu məsələlər xüsusi misallarla işıqlandırılacaqdır.

Diferensial tənliklərin qurulmasında, uyğun başlanğıc və sərhəd şərtlərindən istifadə, həmin diferensial tənliklərin

xəttiliyi fərziyyəsinə, istifadə edilməsinə əsaslanaraq həm də müvafiq saxlanma qanunlarından, evristik üsullardan da istifadə etmək olar. Həllə gətirib çıxaran həqiqətəbənzər mülahizələr yolu D. Poyan tezisinə cavab verir: «isbat etməyi öyrənəcəyik, ancaq həm də duymağı da öyrənəcəyik». Bir çox müəlliflər belə hesab edirlər ki, evristikləri:

1. Planlaşdırma üsulu – məsələnin həllinin alt məsələlərin həllinə bölmək üsulu ilə qənaətləndirilir.
2. Məsələnin uğurlu həllini təmin etməyib, «səhv yola» çəkməyə qadirdirlər.
3. Seçməni məhdudlaşdırırlar.
4. Məsələnin həlli zamanı insanın özünü aparması nəzəriyyəsini xarakterizə edirlər və s.

Bu üsullar Uilerin təklif etdiyi qaydanın sanki tərkib hissəsini təşkil edir.

Evristik üsullar diferensial tənliklərin əyani təsvirində faydalıdır.

Motsartın təbirincə desək, yazılmamış simfoniyanı bir anda təsəvvür etmək olar. Daha mürəkkəb quruluşlu proseslərin tənliklərinin öyrənilməsində məlum misalların evristik üsullarla tədrisi maraqlıdır. Nəzərə almaq lazımdır ki, bu halda evristik üsullar müstəqil rola malik deyil və yalnız ilk mərhələlərdə tətbiq oluna bilərlər. Evristik üsulların tətbiqinə aid misal gətirək. Məsələn, adi diferensial tənliyin tərtibi sərhəd və ya başlanğıc şərtlərinin sayına uyğun gəlməlidir. Əgər iki başlanğıc şərtləri varsa (Koşi məsələsi), uyğun diferensial tənlik ikitərtibli olmalıdır. Əgər iki sərhəd şərti verilmişsə, bu halda da tənlik ikitərtibli olmalıdır. Bu ondan irəli gəlir ki, adi diferensial tənliyin həllində iki asılı olmayan sabit vardır ki, bunları da təyin etmək üçün iki şərt lazımdır. Qeyd edək ki, adi diferensial tənliklər üçün sərhəd məsələsinin həlli həmişə yeganə olmur, bəzi hallarda isə həll ümumiyyətlə olmur (23 – 25-ci misala bax).

Əgər bir başlanğıc şərti varsa, yəni qeyd olunmuş t_0 anında y funksiyasının qiyməti verilmişdirsə (məsələn, ötürmə proseslərində layın başlanğıc təzyiqi, temperaturu, qatılığı, cərəyan şiddəti və s.), onda x oxu üzrə birölçülü ötürmə prosesi tənliyində

$$y = (x, t_0) = f(x)$$

funksiyasının zamana görə törəməsinin ən böyük tərtibi vahidə bərabər olacaqdır.

Əgər funksiyasının və törəməsinin başlanğıc andakı qiymətləri verilmişsə, yəni

$$y = y(x, t_0),$$

$$\frac{\partial y(x, t_0)}{\partial t} = f(x)$$

-dirsə təklikdə funksiyanın zamana görə törəməsinin tərtibi 2-yə bərabər olacaqdır.

Sərhəd şərtləri verilən halda eyni hal təkrar olacaqdır, məsələn, iki sərhəd şərti verilərsə, yəni birölçülü halda, x-in iki qiymətində funksiyanın qiyməti verilərsə, tənlikdə x-ə görə ən böyük törəmə 2-ə bərabər olacaqdır.

32-ci misal. Ətalət qüvvələrini nəzərə almadan dairəvi silindrik boruda sıxılmayan mayenin hərəkətinə baxaq. Ümumi halda maye selinə təzyiq düşküsü, özlülük və ətalət qüvvələri təsir edir. Maye sıxılmayan olduğundan vahid uzunluqda təzyiq düşküsü hərəkəti xarakterizə edən kəmiyyət olacaqdır, yəni borunun başlanğıcında və sonundakı təzyiqlərin fərqinin uzunluğa olan nisbəti $\frac{\Delta P}{l}$-dir. Bu ancaq sıxılmayan mayelər üçün doğrudur, çünki mayenin sərf olunması uzunluq böyunca dəyişmir. Deməli, bu halda mayenin orta sürəti bütün boru boyunca sabitdir. Sıxılan mayelərdə isə hərəkət vaxtı təzyiq azalır, bunun nəticəsində həcmi paylanma artır, beləliklə, orta

həcmi sürət və $\frac{\Delta P}{l}$ uzunluq böyunca artır. Beləliklə, baxılan hal üçün

$$\frac{\Delta P}{l} = \frac{\Delta P}{l}(\upsilon, \mu, d) \qquad (1)$$

alarıq.

Bu ifadəyə kütləni xarakterizə edən sıxlıq daxil edilməmişdir. Yəni yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, ətalət qüvvələri nəzərə alınmır. Mexanikada üç asılı olmayan ölçü vardır: qüvvələr [P], məsafə [L] və zaman [T]*. Başqa ölçülər bu üç ölçüdən alınan törəmə ölçüləridir. (1) ifadəsinin sağ və sol tərəflərini ölçüsüz kəmiyyətlərə çevirək. Bunun üçün (1)-in sağ tərəfində bazis kəmiyyətləri seçmək zəruridir. Baxılan halda ölçüləri PLT olan sırf xalis kəmiyyətlərin kombinasiyasından $\upsilon\mu\, d$ alınır.

Məlumdur ki,

$$[\upsilon] = \frac{L}{T}, \quad [\mu] = \frac{PT}{L^2}, \quad [d] = L.$$

$\frac{\Delta P}{L}$ çıxış kəmiyyətinin ölçüsü $\left[\frac{\Delta P}{l}\right] = \frac{P}{l^3}$ -dir. Bazis kəmiyyətlərində sırf şəkildə $L([d] = L)$ kəmiyyəti var. Başqa ölçüləri necə almaq mümkün olduğunu göstərək. Məsələn, υ, μ, d kəmiyyətlərinin kombinasiyalarından P ölçülü kəmiyyəti almaq üçün

$$[\upsilon]^x\, [\mu]^y\, [d]^z = P$$

$$\left(\frac{L}{T}\right)^x \left(\frac{PT}{L^2}\right)^y L^z = P$$

və ya

$$L^{x-2y+z}\, T^{y-x}\, P^y = P^0\, T^0\, P^1$$

olmağı zəruridir.

(1)-in sağ və sol tərəflərinin ölçülərinin bərabərliyini nəzərə alsaq,

$$\begin{cases} x-2y \quad z=0 \\ y-x=0 \\ y=1 \end{cases}$$

alarıq.

* [] işarəsi ölçüyə aiddir.

Birdərəcəli, üç xətti cəbri tənliklər sistemini həll edərək

$$y=1 \quad x=1 \quad z=1$$

alırıq.

Beləliklə, $[\mu \upsilon d]=P$ və $[d]=L,\ [\mu,\upsilon,d]=P$ olduğunu nəzərə alsaq, bu kəmiyyətləri μ ilə kombinasiya edərək T-ni almaq olar. Bunun üçün μ-nü ölçüsü P-yə bərabər olan kəmiyyətə bölmək və ölçüsü L^2-na bərabər kəmiyyətə vurmaq zəruridir:

$$\left[\frac{\mu d^2}{\mu \upsilon d}\right]=T,$$

və ya

$$\left[\frac{d}{\upsilon}\right]=T.$$

Bunu daha sadə yolla, d-ni υ-yə bölməklə də almaq olar.

Beləliklə,

$$[\mu,\ \upsilon, d]=P,\ [d]=L,\ \left[\frac{d}{\upsilon}\right]=T.$$

(1) ifadəsinin sağ və sol tərəflərini ölçüsüz kəmiyyətlərə çevirək:

$$\frac{\Delta P}{l}\frac{d}{\mu \upsilon d}=F\left(\frac{\upsilon\frac{d}{\upsilon}}{d};\quad \mu\frac{d^2}{\mu \upsilon d\frac{d}{\upsilon}};\quad \frac{d}{d}\right)$$

və ya

$$\frac{\Delta P d^2}{l \mu \upsilon} = F(1, 1, 1) = A = const.$$

Beləliklə, dörd parametr əvəzinə bir ölçüsüz parametr olacaqdır. Başlanğıcda ətalət qüvvələrinin nəzərə alınması qəbul olunmuşdur. Bu fərziyyə təzyiqin Δp düşməsinin υ sürəti ilə mütənasibliyinə gətirir.* Qeyd olunanları təcrübə ilə yoxlamaq olar (verilmiş halda bu nəticə həm də nəzəri yolla alınır). Mümkün olan yoxlama üsulları haqqında 20-ci misalda qeyd edilmişdir. Özlülük qüvvələri nəzərə alınmadığı halda, əvvəlki hala analoji olaraq,

$$\frac{\Delta P d}{l \rho \upsilon^2} = B = const$$

almaq olar, yəni təzyiqin düşməsi sürətin kvadratı ilə mütənasibdir. (1)-in sağ tərəfində dəyişənlərin sayı dördə bərabərdir, əgər bu prosesi təcrübi olaraq tətbiq etsək və hər bir baxılan parametri 8-ci misalda qeyd edildiyi kimi, 5 səviyyədə dəyişsək təcrübələrin sayı $5^4 = 625$-ə bərabər olacaqdır.

Bunlar çoxlu yer tutmaqla bərabər, həm də çətin həyata keçirilir. A sabitinin təyini üçün ölçü analizini tətbiq etdikdə ən azı iki nöqtənin olması zəruridir, belə ki, üçüncü nöqtə $v_0 = 0$; $\Delta p_0 = 0$ məlumdur. Nöqtələrin sayı isə tələb olunan dəqiqliyə əsasən təyin edilir (4-cü misala bax). Bundan əlavə ölçülərin analizindən istifadəetmə təcrübəni 5 müxtəlif maye üzərində və 5 müxtəlif diametrlər üçün deyil, yalnız sürətin dəyişməsi hesabına dəyişməyə, (1) - in sol tərəfini dəyişdirmək yolu ilə aparmağa imkan verir. Ölçülər nəzəriyyəsini bəzi xarakterik zamanların təyin olunmasına və güclu partlayışın analizinə tətbiq edək. Tutaq ki, dairəvi silindrik boruda stasionar olmayan özlü, sıxılmayan mayenin

---

* 30-cu misala bax.

yavaş hərəkətinə baxılır. Maye sıxılmayan olduğundan, sürət yalnız radius istiqamətində dəyişir, yzynuna isə sürətlərin profili sabit qalır. Qeyri-stasionarlıq sıxma ilə xarakterizə olunan ətalət qüvvələrinin nəticəsində meydana çıxır. Zaman artdıqca ətalət qüvvələrinin rolu azalır, özlülük qüvvələrinin rolu isə artır və nəzəri olaraq t ∞ a yaxınlaşdıqda ətalət qüvvəsi sıfra yaxınlaşır və stasionar hərəkət başlanır. Lakin praktik olaraq stasionar rejimin başlanma vaxtı ölçülən və ya hesablanan kəmiyyətlərdən tələb olunan dəqiqlikdən asılıdır. Məsələn, hesablanan y kəmiyyəti:

$$y = 1 - e^{=2t}$$

düsturu ilə təyin edilirsə, onda $t \to \infty$ üçün $y = 1$ alarıq. Eyni zamanda, deyək ki, $t = 3$ olduqda $y = 0{,}997521$, $t = 10$ olduqda $y = 0{,}999999$, yəni əgər $t = 10$ üçün hesablamanı ikinci rəqəm dəqiqliyi ilə aparmaq tələb olunursa, $y = 100$ qəbul etmək olar.

Stasionar rejimin yaranması vaxtını qiymətləndirək. Qiymətləndirmə dedikdə kəmiyyətlərin tərtibinin təyin olunması başa düşülür.

Bu t_1 vaxtı funksional olaraq belə ifadə olunur;

$$t_1 = t_1(\rho, \mu, R).$$

burada R – borunun radiusudur.

(1)-in sağ tərəfinə daxil olan üç kəmiyyəti bazis kəmiyyətləri kimi qəbul edək:

$$[\rho] = \frac{PT^2}{L^4}, \quad [\mu] = \frac{PT}{L^2}, \quad [R] = L.$$

Əgər μ -nu kvadrata yüksəldib ρ-ya bölsək:

$$\left[\frac{\mu^2}{\rho}\right] = P$$

alarıq.

Bu bərabərliyi kəmiyyətlərin kombinasiyası ilə də almaq olar:

$$[\mu]^x [\rho]^y [R]^z = L^0 T^0 P^1.$$

μ, ρ, R-nin ölçülərini yerinə yazsaq:

$$\frac{P^x T^x}{L^{2x}} \cdot \frac{P^y T^{2y}}{L^{4y}} \cdot L^z = L^0 T^0 P^1$$

alarıq.

Sağ və sol tərəfdəki eyni ölçülərin göstərici dərəcələrini bərabərləşdirsək,

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 0 \\ z + 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$x = 2, \quad y = -1, \quad z = 0 \text{ alarıq.}$$

Yəni təbii olaraq yenə də

$$\left[\frac{\mu^2}{\rho} \right]$$

alırıq.

Həmin yolla zaman ölçülərinə malik olan bazis kəmiyyətlərin kombinasiyasını almaq olar. Başqa bir yol da göstərək. Məsələn, μ kəmiyyətindən və yzunluq, güc ölçülərinə malik olan əvvəlcədən alınmış kəmiyyətlərdən istifadə edərək, vaxt ölçüsünə malik olan kəmiyyəti aşağıdakı kimi almaq olar:

$$\frac{\mu}{\frac{\mu}{\rho}} \cdot R^2 = \frac{\rho R^2}{\mu}.$$

Beləliklə,

$$\left[\frac{\mu R^2}{\mu} \right] = T.$$

alarıq.

(1)-in sağ və sol tərəflərində ölçüsüz kəmiyyətlərə keçək:

$$\frac{t_1}{\frac{\rho R^2}{\mu}} = F\left(\rho \cdot \frac{R^4}{\frac{\mu^2}{\rho}\left(\frac{\rho R^2}{\mu}\right)};\quad \mu\frac{R^2}{\frac{\mu^2}{\rho}\cdot\frac{\rho R^2}{\mu}};\quad \frac{R}{R}\right).$$

$$\frac{t_1}{\frac{pR^2}{\mu}} = F\ (1, 1, 1) = C.$$

Sağ tərəfdəki F (1, 1, 1) – sabit kəmiyyətdir. Bu və əvvəlki misallarda kombinasiyalarından çəki, uzunluq və zamanın ölçüləri alına bilən bazis kəmiyyətləri ölçüsüz şəkildə vahidə çevrilir, yəni ölçüsüz şəklindəki yazılış dəyişənlərin sayını mexanikada sayı ən çoxu 3-ə bərabər olan bazis kəmiyyətlərin sayı qədər azaldır.

Aşağıdakı teoremi şərh etmək olar: ölçüsüz parametrlərin sayı, ümumi hədlərin sayı ilə asılı olmayan ölçü hədlər sayının fərqinə bərabərdir. Bu teorem Π – teoremi adlanır. Burada Π – ölçüsüzlük simvoludur, yəni ölçüsüz kəmiyyətlər haqqında teorem vardır. (2)-dən $t_1 \sim \frac{\rho R^2}{\mu}$ * alırıq. Ağırlıq qüvvəsinin təsiri altında riyazi rəqqasın rəqs periodu vaxtının t_2 xarakterini təyin edək:

$$t_2 = t_2\ (l, g)$$

l və g bazis kəmiyyətləri

$$[l] = l\ ;\quad [g] = \frac{L}{T^2}$$

ölçülərinə malikdirlər. $\left[\frac{l}{g}\right] = T^2$ olduğunu nəzərə alsaq, vaxtın ölçüsünü almaq çətin deyildir.

---

* – tərtib işarəsidir.

$$\left[\sqrt{\frac{l}{g}}\right] = T$$

$$\frac{t_2}{\sqrt{\frac{l}{g}}} = F\left(\frac{l}{l};\quad g\frac{g}{l}\right) = F\ (1,1) = const$$

Buradan t_2 zamanın $\sqrt{\frac{l}{g}}$-ilə mütənasibliyi alınır, yəni $t \sim \sqrt{\frac{l}{g}}$ və tezlik rəqs periodu ilə tərs mütənasib olduğundan

$$v \sim \sqrt{\frac{g}{l}}$$

alırıq (29-cu misala bax).

Ölçülər nəzəriyyəsini atom partlayışının analizi üçün tətbiq edək, oblast o dərəcədə kiçikdir ki, onu nöqtə kimi və proses o dərəcədə tez gedir ki, onu ani hesab etmək olar.

Partlayış zamanı çox böyük anda təzyiqi yüz minlərlə atmosferə bərabər olan güclü zərbə dalğası yayılır.

Deməli, başlanğıc anda havanın başlanğıc tezliyini nəzərə almaq olar. Verilən t zaman müddətində zərbə dalğasının radiusu təbii olaraq t-dən və həmçinin E-dən və qazların başlanğıc ρ_0 sıxlığından asılıdır, yəni $r = r\ (t, E, \rho)$. Sağ tərəfə daxil olan kəmiyyətlərin ölçüləri aşağıdakılardır:

$$[t] = T,\quad [E] = PL,\quad [\rho_0] = \frac{PT^2}{L^4}$$

t, E və ρ_0-nı bazis kəmiyyətlər qəbul edərək, kombinasiya yolu ilə aşağıdakıları almaq olar:

$$\left[E^4\right] = P^4 L^4,$$
$$\left[E^4 \rho_0\right] = P^5 T^2,$$
$$\left[\frac{E^4 \rho_0}{t^2}\right] = P^5,$$
$$\sqrt[5]{\frac{E^4 \rho_0}{t^2}} = P,$$
$$\left[E \cdot \sqrt{\frac{E^4 \rho_0}{t^2}}\right] = L \quad \text{və ya} \quad \left[\sqrt{\frac{E t^2}{\rho_0}}\right] = L.$$

Beləliklə,

$$\frac{r}{\sqrt[5]{\frac{E t^2}{\rho_0}}} = F\left(1,1,1\right),$$

buradan

$$r \sim \left(\frac{E t^2}{\rho_0}\right)^{1/5}$$ alınır.

Əgər müxtəlif zaman müddətlərində zərbə dalğasının radiusu məlumdursa, onda $\frac{5}{2}\lg r$ və $\lg t$ koordinatlarında, düz xətt boyunca qruplaşan eksperimental nöqtələri quraraq parlayışın enerjisini təyin etmək olar.

Teylor nüvə sınağı zamanı od kürrəsinin yayılması haqqında çəkilmiş kinofilmi işləyib hazırlamışdı. D. Mak partlayış enerjisinin, təqribən 10^{20} erq-ə bərabər olduğunu təyin etmişdir. Bu rəqəm o dövrdə məxfiləşdirilmişdir.

34-cü misal. İki sonsuz lövhə arasında istiliyin yayılmasının bir ölçülü halına baxaq (18-ci şəkil):

$$T(0, t) = f_1(t), \quad (1)$$
$$T(l, t) = f_2(t), \quad (2)$$
$$T(x, 0) = f_3(x). \quad (3)$$

Bu halda iki sərhəd şərti, yəni (1) – (2) sərhədlərində temperatur və bir başlanğıc şərti, yəni başlanğıc anda temperaturun qiyməti (3) verilmişdir. İki sərhəd şərti verildiyindən, bir başlanğıc və iki sərhəd şərti mövcud olduğundan, x-ə görə törəmənin yüksək tərtibi 2-yə bərabər olacaqdır.

T-in t-yə görə törəməsinin ən böyük tərtibi bir olacaq. Obyekti təsvir edən tənliyin xətti diferensial tənlik olduğunu fərz etsək,

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha_4 = 0 \qquad (4)$$

yazmaq olar.

Yazılmış tənliyin 4 həddi vardır: istilik balansından alınır ki, x – oxu boyunca keçən istilik miqdarının dəyişməsi zamana görə temperaturun dəyişməsinə gətirir, belə ki, məsələn, x oxu boyunca yayılan istiliyin miqdarı azalırsa, istiliyin zamana görə yığılması baş verir ki, bu da təbiidir ki, temperaturun artmasına səbəb olur, beləliklə, tənlikdə x oxu boyunca istiliyin zamana görə temperaturun dəyişməsini xarakterizə edən 2 həddi olmalıdır. Tənlikdə T-in x-ə görə ikinci tərtib törəməsi (2 sərhəd şərti) və T-in t-yə görə birinci tərtib törəməsi (bir başlanğıc şərt) olmalıdır və bundan başqa, tənlik iki həddən ibarət olduğundan (4) ifadəsini aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \div \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

və ya

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \frac{\partial T}{\partial t} \cdot \qquad (5)$$

Sol tərəf x oxu boyunca yayılan istiliyin miqdarının dəyişilməsini ifadə edir. 30-cu misalda diferensial şəkildə yazılmış (4) düsturu

$$q_2 = -k_4 \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (6)$$

şəklindədir.

İstilik keçirilməsi böyük temperaturdan kiçiyə doğru baş verdiyindən mənfi işarəsi yazılmışdır və buna görə də x oxu boyunca T azalır, yəni $\frac{\partial T}{\partial x}$-in ifadəsi mənfi işarəlidir. (6)-dan

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q_2}{k_4}$$

alırıq.

Bunu (5)-də yerinə yazsaq,

$$\frac{\partial q_2}{\partial x} = -\frac{q_3 k_4}{\alpha_1} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}. \qquad (7)$$

alarıq.

Qeyd etdiyimiz kimi, x oxu boyunca köçürülən istiliyin miqdarı azalırsa, yəni $\frac{\partial q_2}{\partial x}$-in işarəsi mənfidirsə, zamana görə temperaturun artması baş verir, yəni $\frac{\partial T}{\partial t} > 0$ olur. (7)-nin sol tərəfi mənfidir, sağ tərəfi də mənfi olmalıdır, belə ki $\frac{\partial T}{\partial t} > 0$ və deməli, $\frac{\alpha_3 k_4}{\alpha_1} < 0$. $k_4 > 0$ olduğundan $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} < 0$ olar, (7)-dən $-\frac{\alpha_3}{\alpha_1} > 0$ alırıq. Onda (5)-i

$$\alpha_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (8)$$

şəklində yazaq.

(8) – tənliyi xətti istilikkeçirmə tənliyidir və 28-ci misalda göstərildiyi kimi onun yeganə həlli vardır.

Yuxarıda deyilənləri qısa şərh edək: q-nin x oxu boyunca dəyişilməsi temperaturun zamana görə dəyişilməsinə gətirir, yəni

$$\frac{\partial q_2}{\partial x} = -c\frac{\partial T}{\partial t}, \quad c = \frac{\alpha_3 k_4}{\alpha_1}.$$

Sağ tərəfdə mənfi işarəsinin götürülməsi yuxarıda əsaslandırılmışdır. $\left(\frac{\partial q}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} > 0\right)$. Köçürmə qanunundan q_2-ni yerinə yazsaq, (8) diferensial tənliyini almaq olar.

(8)-də α^2 kəmiyyəti, ölçülərin analizi nöqteyi-nəzərindən ölçü əmsalıdır. $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ və $\frac{\partial^2 T}{\partial t}$ müxtəlif ölçülü olduğundan ölçülər analizindən istifadə edərək

$$\alpha^2 = \alpha^2\left(c, k_4\right)$$

k_4 kəmiyyətini qiymətləndirək, burada k_4 – istilikkeçirmə əmsalı, c – isə istilik tutumudur. Ölçülər analizindən

$$\alpha^2 \sim \frac{k_4}{c}.$$

almaq olar.

Başlanğıc və sərhəd şərtləri verildikdə məsələ korrektdir. Simin uclarından birində temperatur və istilik verilən digər hala baxaq, yəni

$$T\,(0, t) = f_1(t), \tag{9}$$

$$\frac{\partial T\,(0, t)}{\partial x} = f_2(t) \tag{10}$$

Bu halda məsələ korrekt deyildir (20-ci məsələyə bax). Məsələnin qeyri-korrektliyini xüsusi misalda göstərmək olar. Tutaq ki,

$$f_1\,(t) = \sqrt{\frac{2}{n}}\,\sin nt, \tag{11}$$

$$f_2\,(t) = const + \sin nt. \tag{12}$$

Onda asanlıqla görmək olar ki, verilən şərtlər daxilində həll

$$T(x,t)=\sqrt{\frac{2}{n}}\sin\left(nt+\sqrt{\frac{n}{2}x}\right)l^{\sqrt{\frac{n}{2}x}} \qquad (13)$$

şəklində olur.

Bu funksiya $\alpha^2=1$ olduqda (8) istilikkeçirmə tənliyini, ucların birində, yəni $x=0$-da verilən iki şərti və

$$T(x,0)=\sqrt{\frac{2}{n}}\sin\left(\sqrt{\frac{n}{2}x}\right)e^{\sqrt{\frac{n}{2}x}} \qquad (14)$$

başlanğıc şərtini ödəyir. Doğrudan da

$$T(0,t)=\sqrt{\frac{2}{n}}\sin\left(nt+\sqrt{\frac{n}{2}x}\right)l^{\sqrt{\frac{n}{2}x}}\Bigg|_{x=0}=$$

$$\vdots \qquad =\sqrt{\frac{2}{n}}\sin t=f_1(t).$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}=\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\cos(nt)\sqrt{\frac{n}{2}x}\right)\sqrt{\frac{n}{2}}\,l^{\sqrt{\frac{n}{2}x}}+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{n}}\sin\left(nt+\sqrt{\frac{n}{2}x}\right)\sqrt{\frac{n}{2}}\,l^{\sqrt{\frac{n}{2}x}}=$$

$$=\cos\left(nt+\sqrt{\frac{n}{2}x}\right)l^{\sqrt{\frac{n}{2}x}}+\sin\left(nt+\sqrt{\frac{n}{2}x}\right)l^{\sqrt{\frac{n}{2}x}}.$$

Buradan

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=const+\sin nt=f_2(t)$$

alırıq.

Beləliklə, (13) funksiyası uclardan birində verilən iki şərti və başlanğıc şərtini ödəyir:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{\partial T}{\partial t},\quad \left(\alpha^2=1\right)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\sqrt{\frac{n}{2}} \sin\left(nt + \sqrt{\frac{n}{2}}\, x\right) l^{\sqrt{\frac{n}{2}} x} +$$

$$+ \sqrt{\frac{n}{2}} \cos\left(nt + \sqrt{\frac{n}{2}}\, x\right) l^{\sqrt{\frac{n}{2}} x} +$$

$$+ \sqrt{\frac{n}{2}} \cos\left(nt + \sqrt{\frac{n}{2}}\, x\right) l^{\sqrt{\frac{n}{2}} x} +$$

$$+ \sqrt{\frac{n}{2}} \sin\left(nt + \sqrt{\frac{n}{2}}\, x\right) l^{\sqrt{\frac{n}{2}} x} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{n}{2}} \cos\left(n + t\sqrt{\frac{n}{2}}\, x\right) l^{\sqrt{\frac{n}{2}} x} =$$

$$= \sqrt{2n} \cos\left(n + t\sqrt{\frac{n}{2}}\, x\right) l^{\sqrt{\frac{n}{2}} x} \frac{\partial T}{\partial t} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{n}} \cos\left(nt + \sqrt{\frac{n}{2}}\, x\right) n e^{\sqrt{\frac{n}{2}} x} =$$

$$= \sqrt{2n} \cos\left(nt + \sqrt{\frac{n}{2}}\, x\right) l^{\sqrt{\frac{n}{2}} x}.$$

Beləliklə

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

alırıq, yəni (13) funksiyası (8) istilikkeçirmə tənliyini ödəyir. (13) həllinin təhlili göstərir ki, n-in kiçik dəyişmələri T-nin böyük dəyişmələrinə gətirir, yəni məsələ korrekt deyil. Verilmiş andakı temperatura görə əvvəlki anlardakı temperaturları təyin etmək həll olunursa, istilikkeçirmə tənliyində $a^2 = -1$ olur və məsələ korrekt olmur.

35-ci misal. Qeyd olunmuş evristik üsulu simin eninə rəqslərinin diferensial tənliyinin çıxarılmasına tətbiq edək. Bu halda simin iki uclarında $x = 0$, $x = l$-də $U(x, t)$ yerdəyişməsi verilir, yəni

$$U(0, t) = f_1(t), \tag{1}$$

$$U(l, t) = f_2(t). \tag{2}$$

Bundan əlavə iki başlanğıc şərti, yəni simin başlanğıc vəziyyəti və başlanğıc sürəti verilir:

$$U(x, 0) = f_3(t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = f_4(x) \tag{4}$$

İki sərhəd şərti verildiyindən x-ə görə törəmənin ən yüksək dərəcəsi iki olacaqdır, iki başlanğıc şərtinin verilməsi isə t-yə görə törəmənin ən yüksək dərəcəsinin 2-yə bərabər olduğunu təyin edir.

Beləliklə, obyekt xətti olduqda (xətti diferensial tənliklə ifadə olunur), tənliyi

$$\alpha_1 \frac{\partial_2 U}{\partial t^2} + \alpha_2 \frac{\partial U}{\partial t} + \alpha_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \alpha_4 \frac{\partial U}{\partial x} + \alpha_5 U + \alpha_6 = 0 \tag{5}$$

şəklində yazmaq olar.

Rəqsləri ideal mühitdə baş verən və sərbəst (sürtünməsiz) hesab edərək və simə gərilmə və ətalət qüvvələrinin təsir etdiyini nəzərə alaraq (5) tənliyində iki həddi: birinci (iki başlanğıc şərti) və üçüncü (iki sərhəd şərti) hədləri saxlamaq zəruridir:

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0,$$

və ya

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial U}{\partial x^2} \tag{6}$$

Baxılan hal üçün $\alpha > 0$ olduğunu asanlıqla təyin etmək olar. Bunun üçün əvvəlki misalda olan mühakimələri çubuğun uzununa rəqsinin daha əyani halı üçün aparmaq lazımdır.

a^2 –əmsalı, F_1 – gərilmə qüvvəsindən və ρ_1 xətti sıxlığı vahid uzunluğa düşən kütlə ilə təyin olunan ətalət qüvvəsindən asılıdır, yəni

$$a^2 = a^2\left(F_1, \rho_1\right).$$

(6) tənliyindən

$$[\alpha] = \frac{L^2}{T^2}$$

alırıq. $[F_1] = P$ $[P_1] = \dfrac{PT^2}{L^2}$ olduğunu nəzərə alaraq ölçülərin təhlili əsasında, asanlıqla $\alpha \sim \dfrac{F_1}{\rho_1}$ olduğunu təyin etmək olar.

Çubuğun uzununa rəqsləri α Yunq modulundan, E_ρ-dan və həcmi sıxlıqdan asılıdır:

$$\alpha = \alpha\left(E, \rho\right), \quad [E] = \frac{P}{L^2}, \quad [\rho] = \frac{PT^2}{L^4}$$

olduğunu nəzərə alsaq, yenə də ölçülərin təhlilindən

$$\alpha \sim \frac{E}{\rho}$$

almaq olar.

Bu baxılan məsələ korrektdir və 27-ci misalda göstərildiyi kimi, onun həlli yeganədir. Metodoloji nöqteyi-nəzərdən $\alpha = -1$ halında da misal maraqlıdır. Bu halda

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \tag{7}$$

tənliyini alırıq.

Aşağıdakı şərtləri götürək:

$$U\left(x, 0\right) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \alpha \sin n(x) \qquad (0 \le x \le \pi) \tag{9}$$

yəni Koşi məsələsi həll olunur. Simin eninə rəqsləri üçün də Koşi məsələsi qoyula bilər. Lakin simin sonsuz halı üçün təbiidir ki, onun ucları rəqs proseslərinə təsir etmir. $\alpha = 1$ halı isə fiziki məna kəsb etmir. $\alpha = -1$ halı üçün Koşi məsələsinin həllı var və

$$U(x,t) = \frac{\alpha}{n} \sin nt \cdot \sin nx \tag{10}$$

düsturu ilə təyin edilir.

Fərz edək ki, (9) şərtinin əvəzində

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \alpha_1 \sin nx_1$$

şərti ödənilir. Şərtin dəyişməsi xüsusi halda yoxlayıcı-ölçü cihazlarının xətası ilə təyin edilən bu şərtin dəqiq olmasından irəli kəlir.

$\alpha_1 - \alpha$ nəfərqinin kifayət qədər kiçik kəmiyyət olması, təbii olaraq (9) şərtinin azacıq dəyişməsinə gətirir və $\sin[nx] \le 1$ olduğunu nəzərə alsaq, (9) başlanğıc şərtinin azacıq dəyişməsinə uyğun olan iki həllin fərqi

$$U_1 - U = \left(\frac{\alpha_1 - \alpha}{n}\right) \sin nx \; sh \; nt \tag{11}$$

olar.

Bu fərq zamandan asılı olaraq artır:

$$\lim_{1 \to \infty} (U_1 - U) \to \infty,$$

yəni həll başlanğıc şərtlərindən kəsilməz asılı deyil.

A. Pyankare yazmışdır: «hesablamadan, müşahidədən böyük dəqiqlik tələb etmək mənasızdır, ancaq hesablamadan az dəqiqlik də tələb etmək olmaz». Qiymətləndirmədə model olmalıdır. Modellər – prosesin ideallaşdırılmasıdır. Fizik Y. İ. Frenkelin dediyi kimi, modellər – prosesin yaxşı

karikaturasıdır. Karikatura nədir? Bu kiçik, ancaq zərif, dəqiq, səciyyəvi təfsilatlara görə insanı, prosesi təyin etməkdir.
Modelləri xarakterizə edərək «ancaq özünlə gətirdiyini tapmaq olar» – kimi ispan mehmanxanası haqqındakı fransız atalar sözünü yada salmaq faydalı olardı. Burada Heynini də yada salmaq yerinə düşərdi.

Bir əsas olmasaydı
Mahnı da yaranmazdı.
İlahiyə də heçdən
Aləm yaradılmazdı.
Hər bir şeyə zövq verən
Məharət, bacarıqdır.

(tərcümə Marşakındır).

Məsələ əməliyyata necə təsvir etməkdən, onun belə təsviri üçün nə qədər faktor lazım olduğunu bilməkdən ibarətdir. İlk baxışda belə təəssürat yaranır ki, faktorlar çox olduqca, proses daha dərin və tam təsvir olunur. Bununla belə burada Heyzanberqin qeyri-müəyyənlik prinsipi özünü göstərir. Elə an çatır ki, hadisəyə nə qədər dərindən yanaşırıqsa, o daha az dəqiqliklə təsvir olunur, hər bir həll olunan problem yeni problemlər yaratdığından, çox problem həll etdikcə daha çox həll olunmamış problem meydana çıxır.

Beləliklə, məqsədə uyğun sərhəddi tapmaq lazımdır. Deyilənləri məşhur moralist Labryuyerin dedikləri ilə müqayisə edin: «Məlum... məhdudluq bəzi adamlara müdrikliyin yolu ilə getməyə kömək edir».

Məlumdur ki, sistemlərin əksəriyyəti Pareto prinsipinə görə işləyir. Bu prinsipə görə sistemi xarakterizə edən faktorlar çoxluğundan ancaq bəziləri vacibdir. Sistemlərin əksəriyyətində faktorların 20%-i sistemin xassələrinin 80%-ni, qalan 80% faktorlar isə sistemin xassələrinin yalnız 20%-ni müəyyən edir.

Sübutlara (cəlbetmə, məqsəd) və nəticələrə əsaslanan Erkess-Dodson qanunu vardır. Sübutlar çox olduqda nəticə də çox olur. Müəyyən həddən sonra əksinə olur. İnsan həyatında da belədir – çox çalışmaq lazım deyildir. Həddən artıq çalışmamaq üçün çalışmağın həddini bilmək lazımdır. Bu həddi tapmağı necə öyrənməli? Ağlabatan hüdudu? Zəruri keyfiyyət külliyyatını tapmaq?

Yeri gəlmişkən qeyd edək ki, Leman qanununa görə 20 yaşla 35 yaş arasında insanın işgüzarlığı artır, sonra isə azalmağa doğru gedir (70 yaşa qədər). Əgər yeni keyfiyyətlər prosesin təsvirini mürəkkəbləşdirirsə, məsələnin həllini çətinləşdirirsə, «bucaq arxasından» baxmağa imkan verən dəlillər vermirsə, onlar faydasızdırlar.

Delfinin effekti... Məlumdur ki, delfinlər əzələlərinin qüvvəsi çatdığından 7 – 10 dəfə çox sürətlə üzə bilir. Tədqiqatlar göstərir ki, bunun səbəbi xüsusi halda delfinin ifraz etdiyi xüsusi mayedir ki, bu maye suyun burulğanlığını qat-qat azaldır və delfinin böyük sürətlə hərəkət etməsinə imkan yaradır. Bu tədqiqatlar əsasında süni surətdə həmin xassələrə malik olan maddələr almaq mümkün olmuşdur. Bu polimerlərdir.

Bu, Toms effektidir (37-ci misala bax).

Əgər suya cüzi miqdarda (burada qəribəlik azlıqdadır) 10 üstü mənfi 8-lə ölçülən (hər kubmetrə 1 qr-dan az) polimer əlavə etsək, suyun hidravlik müqaviməti 2 – 3 dəfə azalar (yüksək molekulalı polimerlər). Burada paradoks alınır – biz polimer əlavə edirik o, suyun özlülüyünü artırır, suyun müqaviməti isə qat-qat azalır. Aydınlaşdırıldı ki, suya bəzi faktorlar təsir etdikdə o, genişlənmə xasiyyətinə malik olur və bununla da onun hidravlik müqaviməti azalır.

Prosesi təsvir edərkən biz onu ideallaşdırırıq və ideallaşdırarkən təbiidir ki, nə isə itiririk, ancaq arzu edirik ki, bu itkilər obrazın özünün itirilməsinə gətirib çıxarmasın.

Elm və incəsənətin güclü vasitələrindən biri «azın» təhlilinə və ona nəzər salınmasına əsaslanır. İngilis yazıçısı Q. K. Çestertonun hekayələrinin qəhrəmanı keşiş Braun normadan azacıq kənara çıxmaları nəzərə alaraq cinayətləri açır.

Diferensial tənliyin evristik üsulla çıxarılmasında prosesin xətti tənliklərlə təsvir olunması fərz edilmişdir. Azacıq qeyri-xəttiliyin nəzərə alınması yeni effektlərə gətirə bilər (30-cu misala bax). Deyilənləri istiliyin yayılmasının qeyri-xətti prosesinin xüsusi misalında nümayiş etdirək.

36-cı misal. İstilikkeçirmə əmsalının temperaturdan asılılığını nəzərə almaqla istiliyin yayılmasına baxaq, yəni

$$q_2 = -k_4(T)\frac{\partial T}{\partial x}\cdot$$

Nəticənin təsvirinin əyaniliyi üçün

$$k_4(T) = cT$$

qəbul olunur. Bunu 35-ci misalın (7) tənliyində yerinə qoyaraq

$$\frac{\partial T\dfrac{\partial T}{\partial x}}{\partial x} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1 c}\frac{\partial T}{\partial t} \quad \alpha = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1 c} \tag{1}$$

alarıq.

Sol tərəfi diferensiallasaq,

$$\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + T\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \alpha\frac{\partial T}{\partial T} \tag{2}$$

alarıq.

$T = ax + bt$ funksiyası (2) tənliyini ödəyir.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = b. \tag{3}$$

Törəmələrin qiymətini (2)-də yerinə yazaraq

$$a^2 = cb \tag{4}$$

alırıq.

(3) funksiyası baxılan məsələnin aşağıdakı sərhəd və başlanğıc şərtlərini ödəyən həllidir

$$T(0,t)=\gamma(t), \tag{5}$$

$$T(x,0)=0 \tag{6}$$

(5) şərtinin ödənilməsindən

$$\gamma b = bt$$

$$\gamma = b$$

alırıq.

Onda $a^2 = \alpha\gamma$ olar.

(6) başlanğıc şərtinin ödənilməsi üçün temperaturun dəyişdiyi və ondan kənarda sıfır olduğu həyəcanlanma zonasının olmasını qəbul etmək zəruridir.

Bu zonanın ölçüsü

$$l = a + bt = 0$$

$$l = -\frac{b}{a}t \tag{7}$$

ifadələrindən təyin olunur.

Fərz edilir ki, $a < 0$, $b > 0$, onda $l > 0$, yəni $l \le 0$ zonasında temperatur (3) qanununa görə dəyişir. $t = 0$ olanda, $l = 0$ və temperatur hər yerdə sıfra bərabərdir. Baxılan halda istiliyin sonsuz yayılmasının sürəti sonlu olur.

Beləliklə, qeyri-xəttiliyin nəzərə alınmaması keyfiyyətcə yeni effektə – istiliyin yayılma sürətinin sonluluğuna gətirir. Bu nəticə 1950-ci ildə Y. B. Zeldoviç və A. S. Komponeys tərəfindən parlaq misalda göstərilmişdir. Sonralar onun riyazi isbatını daha ümumi hal üçün Q. İ. Barenblatt və M. İ. Vişik vermişlər.

Sonlu yayılma sürətli həyəcanlanmaya malik olan qeyri-xətti istilikkeçirmə tənliyinin daha ümumi halına baxaq. Məsələn,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right), \quad k(T) = T^{\nu}, \quad \sigma > 0 \tag{8}$$

tənliyinin həlli «qaçan» dalğalar şəklində aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$T(x,t)=\begin{cases}(ca)^{\frac{1}{\sigma}}\ (at=x)^{\frac{1}{v}} & x\le at\\ 0 & x>at,,.\quad t>0.\end{cases}$$

Bu həll başlanğıc temperaturu $T\ (x,0)=0$ olan mühitdə istiliyin yayılma prosesini ifadə edir, $x=0$ sərhəddində temperatur $T\ (0,t)=\left(ca^2t\right)^{1/\sigma}$ qanunu ilə dəyişir.

Beləliklə, mühit a sürəti ilə qızır. Qeyd edək ki, həyəcanlanmanın yayılması sürətinin sonlu olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\int_0^T \frac{k(T)}{T}\,dt<\infty$$

inteqralının məhdud olmasıdır.

İstiliyin sonlu sürətlə yayılması prosesinə başqa bir misal, istiliyin ani mənbə tipini ifadə edən (8) tənliyin həlli ola bilər:

$$T\ (x,i)=\begin{cases}T_1(t)\left[1-\left(\dfrac{x}{x_1(t)}\right)^2\right]^{1/\sigma} & /x/\le x_1(t)\\ 0 & /x/>x_1(t)\end{cases}$$

burada

$$x_1\sim \text{const}\cdot t^{\,1/\sigma+2}\ ;\quad T_1\ (t)\sim \text{const}\ t^{\,-1/\sigma+2}$$

Beləliklə, yüksək temperaturlu oblast qızdırılmamış maddə üzrə sonlu sürətlə yayılır. Vaxt keçdikcə temperatur hər bir nöqtədə monoton azalır.

$$T\sim t^{\,-1/\sigma+2}$$

1963-cü ildə A. A. Somarski və İ. M. Sobol $k\ (T)=T^{\sigma}$ olduqda (8) tənliyinin həllini aşağıdakı şəkildə tapmışlar:*

---

* Tapılan həllərin düzgünlüyünü bilavasitə tənlikdə yerinə yazmaqla yoxlamaq olar.

$$T(x,t)=\begin{cases} b\,(=l)^{-1/\sigma}\left(1-\dfrac{x}{x_1}\right)^{2/\sigma}, & x\le x_1 \\ 0 & x>x_1 \end{cases}$$

$$x_1=\sqrt{\frac{2\sigma^{\sigma}\,(\sigma+2)}{\sigma}}\,,\quad \infty<t_0<t<0 \qquad (9)$$

Həllin qeyri-adiliyi ondan irəli gəlir ki, dalğa cəbhəsi tərpənməzdir, yəni qeyri-stasionar istilikkeçirmə tənliyinin həlli dayanmış istilik dalğasını təsvir edir. Temperaturun sərhəddə dəyişməsi rejimi prinsipialdır:

$$T\,(0,t)=b\,(-t)^{-1/\sigma}.$$

Qata bütünlüklə təsir olmasından, quyu dibinə yaxın hissənin işlənməsindən asılı olmayaraq istilik təsirinin effektivliyini azaldan əsas faktorlardan biri lay örtüyündən və altından keçən istilik itkisidir. Qatın qızdırılması prosesi uzun müddət ərzində baş verdiyindən onlar qata daxil olan istiliyin çox hissəsini təşkil edə bilərlər. Quyu dibinə yaxın sahə qızarkən adətən temperaturun buruğun bir neçə metr radiusunda yüksəldilməsi zəruridir. Lakin buruğun lokal ətrafında temperaturun profilini yaratmaq mümkün olmur, belə ki, yenə də qızma uzunmüddətli olduğundan istilik «axır» və qızma zonası qeyri-müəyyən qalır.

Layda yüksək temperaturlu lokal oblast yaratmaq olar. Temperaturla işləmə rejiminin tətbiqi çox sərfəlidir. Təsir effekti xüsusi termohidrodinamik rejimlərin yaradılması nəticəsində də artırıla bilər.

Alınan nəticəni analogiya metoduna əsaslanaraq aydın surətdə təsvir etmək olar.

Qazın izotermik filtrasiyasının məsaməli mühitdə diferensial tənliyi (1)-ə analojidir, burada P əvəzinə T təzyiqi

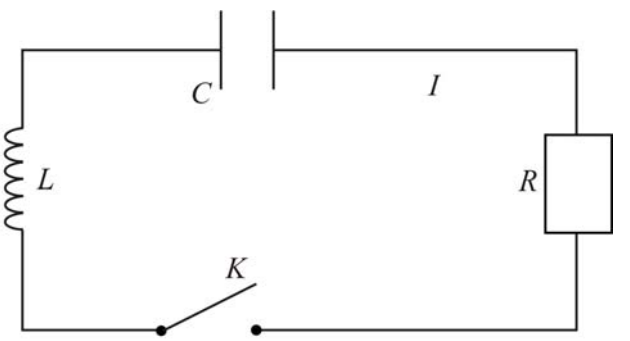
başa düşülür. Layda qazın vurması başlanğıc təzyiqin sıfır olduğu yerdə baş verir, yəni bu zaman qat «boş olur».

Həmin misal əsasında bir yaradıcı alqoritm vermək olar: parlaq misal üzərində isbat etməklə daha ümumi isbata keçmək. Qeyd edildiyi kimi, analogiya üsulu əsas yaradıcı vasitələrdən biridir (29-cu misala bax).

Kepler analogiyalar – təbiətin bütün «sirlərini bilən sədaqətli müəllimlər» haqqında yazmışdır.

Qeyd edilmişdir ki, təbiətin vəhdəti hadisələrin müxtəlif sahələrinə aid diferensial tənliklərin böyük analogiyasında müşahidə olunur. Bu tənliklər vasitəsilə hidrodinamika məsələlərini həll etmək və potensiallar nəzəriyyəsini ifadə etmək olar[2].

Analogiya üsulunun əsasında müxtəlif modelləşdirici maşınlar yaradılmışdır: Bu EQDA (elektrodinamik analogiya); hidravlik analogiya (hidrointeqrator)-dır.



19-cu şəkil.

37-ci misal. Analogiya üsulunu bir sərbəstlik dərəcəsi olan, *m* kütləli maddi

---

[2] *Bax*: Materializm və empiriokritisizm, 5 nəşr, PSS 18-ci cild, s.306.

nöqtənin sərbəst rəqsləri və L induktivindən, R om müqavimətindən, C tutumlu kondensatordan və K açarından ibarət elektrik konturu misalı üzərində nümayiş etdirək. Zəncirdən elektrik cərəyanı keçir (19-cu şəkil). Kirxhof qanununa görə ardıcıl zəncirlər üçün potensiallar fərqi om müqavimətindən, kondensatorda və makarada olan gərginliklər cəmindən ibarətdir. Bu üç təşkiledici aşağıdakı qayda ilə hesablanır:

a) öz-özünə induksiya nəticəsində gərginliklər fərqi öz-özünə induksiya əmsalının *L,* cərəyanın dəyişmə sürətinin hasilinə, yəni

$$L\frac{dI}{dt}$$

- yə bərabərdir.

b) kondensatordakı gərginliklər fərqi (tərifə görə)

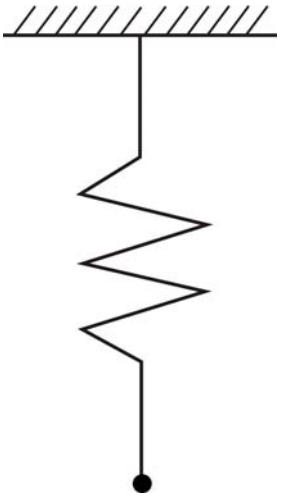
$$\frac{1}{c}\int_0^t Idt$$

-yə bərabərdir.

Beləliklə, hadisəni ifadə edən diferensial tənliyi bu şəkildə yazaq:

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{1}{c}\int_0^t Itd=0$$

Bu ikinci tərtib diferensial tənliyi həll etdikdə iki sabitin tapılması üçün şərt verilməlidir: Məsələn, $t=t_0$ başlanğıc anında $I=I_0$ və $\frac{dI}{dt}=I_0^{/}$ şərtləri verilir.



20-ci şəkil.

Bir tərtib sərbəstlik dərəcəsi olan mexaniki dövrəyə baxaq. Qüvvələrin müvazinəti şərtlərini yazaq (20-ci şəkil). Yükə fəal ağırlıq və passiv müqavimət qüvvələri təsir edir.

Dalamber prinsipindən istifadə edərək müvazinət şərtini

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + h\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

şəklində yazaq, burada m – kütlə, h – rəqslərin sönməsi, k – bərklik əmsalı, x – yerdəyişmədir.

(A) tənliyində birinci hədd mütləq qiymətcə ətalət, ikinci sürtünmə, üçüncü isə elastiklik qüvvəsidir.

Mexaniki rəqslərin tənliyi də elektrik rəqslərini ifadə edən tənlik şəklində olur. Deməli, göstərilən tənliklərdə $x - I$; $m - L$; $h - R$ və $k - \frac{I}{c}$ parametrləri analojidirlər. Aşağıdakı şəkildə ölçüsüz kəmiyyətlərə keçək:

$$\bar{x} = \frac{x}{x_0}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{I} = \frac{I}{I_0},$$

burada t_0 arqumentin başlanğıc qiyməti, x_0 və I_0 funksiyaları başlanğıc qiymətləridir. Beləliklə,

$$\frac{LI_0}{t_0^2}\frac{d^2\bar{I}}{d\bar{t}^2}+R\frac{I_0}{t_0}\frac{d\bar{I}}{d\bar{t}}+\frac{I_0}{c}\bar{I}=0 \qquad (1)$$

alınır.

Əgər tənliyin bütün hədlərini $\frac{1}{c}I_0$ -a bölsək, ölçüsüz əmsallı aşağıdakı tənliyi alarıq:

$$\frac{LC}{t_0^2}\frac{d^2\bar{I}}{d\bar{t}^2}+\frac{RC}{t_0}\frac{d\bar{I}}{dt}+\bar{I}=0. \qquad (2)$$

Mexaniki rəqslərin tənliyini analoji olaraq ölçüsüz şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\frac{m}{kt_0^2}\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2}=\frac{h}{kh_0}\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}+\bar{x}=0.$$

Elektrik dövrəsində rəqs tənlikləri üçün başlanğıc şərtlərini ölçüsüz şəkildə yazsaq:

$$t=1,\quad \bar{I}=1,\quad \bar{I}'=\frac{\bar{I}_0\,t_0}{I_0}$$

alarıq.

Mexaniki rəqslərin tənliyi üçün başlanğıc şərtləri

$$\bar{t}=1,\quad \bar{x}=1,\quad \bar{x}'=\frac{x_0'\,t_0}{x_0}$$

olar.

İkinçi başlanğıc şərtlərin bərabər olması üçün

$$\frac{x_0'}{x_0}=\frac{I_0'}{I_0} \qquad (3)$$

şərtləri ödənilməlidir.

Mexaniki və elektrik rəqslərinin analogiyasından istifadə edərək bir tənlikdən digərinə keçək.

Fərz edək ki, mexaniki kontur üçün m, k və h verilmişdir. Elektrik konturunda I_0-ı verən L_1 və L məlum olduqda I_1-i tapmaq olar.

Mexaniki və elektrik rəqslərini ifadə edən tənliklərin eyni olması üçün

$$\frac{m}{kt_0^2} = \frac{LC}{t_0^2}, \tag{4}$$

$$\frac{h}{kt_0} = \frac{RC}{t_0} \tag{5}$$

olması zəruridir. Onda $\bar{I} = \bar{I}(\bar{t})$ və $x = \bar{x}(\bar{t})$ olar.

(1) və (2) tənliklərindən R, C, L məchullarının tapılması üçün onlardan birini vermək lazımdır. Məsələn, C-nin qiymətini verməklə R və L-i tapmaq olar.

Verilmiş $\bar{I} = \bar{I}(\bar{t})$ şərti üçün mexaniki sistemdə $x = \bar{x}(\bar{t})$ şərtinin ödənilməsindən ötrü elektrik konturunun parametrlərinin və başlanğıc şərtlərinin seçilməsinə baxaq. Bunun üçün I_0', I_0, L, C və R elə seçilməlidir ki, (3) – (5) bərabərliyi ödənilsin. Məsələn, C və I_0^1 qiymətlərini verərək bu üç tənlikdən I_0, L və R-i tapmaq olar. Bu parametrlərin seçilməsi aparılan təcrübənin yerindən və şərtlərindən asılıdır.

Həmin parametrləri tapdıqdan sonra $\bar{I} = \bar{I}(\bar{t})$ asılılığını yaratmaq üçün uyğun elektrik dövrəsi yığılır. Lyapunov funksiyaları üsulu (A) misalında baxılacaq mexaniki analogiyaya malikdir.

Fəzalar müstəvisinə keçək, yəni $x' = x_1$, $x_1' = -\frac{h}{m}$, $x - \frac{k}{m}x$ götürək. Tam enerji bu cür təyin olunur:

$$E=\int_0^X mx''dx+\int_0^x kxdx=\int_0^x m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)dx+$$

$$+\frac{kx^2}{2}=\int_0^x m\upsilon d\upsilon+\frac{kx^2}{2}=\frac{m\upsilon^2}{2}+$$

$$+\frac{kx^2}{2}=\frac{m(x')^2}{2}=\frac{kx^2}{2},$$

burada

$$\upsilon=\frac{dx}{dt}.$$

Beləliklə,

$$E=\frac{mx_1^2}{2}+\frac{kx^2}{2}$$

alırıq.

Müvazinət vəziyyətində $(x_1 = x = 0)$ tam enerji minimal qiymət alır və fəza müstəvisində E = const və ya $\frac{x_1^2}{2\frac{E}{m}}+\frac{x^2}{2\frac{E}{k}}=1$ xətləri olacaqdır.

$x_1 - x$ koordinatlarında xətlər yarımoxları

$$\sqrt{2\frac{E}{m}} \quad \text{və} \quad \sqrt{\frac{E}{k}}$$

olan ellepslərdir. Tam enerjinin zamana görə dəyişmə sürəti, yəni

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d\left(\frac{mx_1}{2}\right)^2}{dt}=\frac{d\left(\frac{kx^2}{}\right)}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d\left(mx_1^2\right)}{dt}+\frac{1}{2}\frac{d\left(kx^2\right)}{dt}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d\left(mx_1^2\right)}{dx^2}\frac{dx_1}{dt}++\frac{1}{2}\frac{d\left(kx^2\right)}{dx}\frac{dx}{dt}=$$

$$=mx_1x_1^1=kxx'=mx_1x_1^1+kxx_1.$$

olar.

(A) tənliyindən

$$mx_1^1 = -hx_1 - kx$$

alınır. Bu ifadəni (6)-da yerinə qoysaq,

$$\frac{dE}{dt} = x_1\left(-hx_1 - kx\right) + kxx_1 = -hx_1^2 - kxx_1 + kxx_1 = -hx_1^2$$

alarıq.

Sürtünmə olduqda $h > 0$ olur və onda $\frac{dE}{dt} < 0$ alırıq. Beləliklə, fəza müstəvisində E = const xətləri trayektoriyalarda çöldən içəri kəsişirlər.

Beləliklə, baxılan vəziyyət asimptotik dayanıqlı olacaqdır. $h = 0$ $E = const$ olduqda isə baxılan vəziyyət asimptotik dayanıqsız olacaq. Nəhayət, «yellənən» sistemlər üçün mümkün olan mənfi sürtünmə varsa, onda $h < 0$ və $\frac{dE}{dt} > 0$, daha doğrusu dayanıqsızlıq vəziyyəti olacaqdır.

Avtonom $\frac{dx}{dt} = f(x)$ sistemi üçün aparılan mülahizələr, haradakı $f(0) = 0$, yəni osistem üçün ki, $f(0) = 0$ $bx = 0$ həyəcanlanmamış həlldir, dayanıqlıq haqqında Lyapunov teoreminə gətirib çıxarır. $x = 0$ nöqtəsinin ətrafında kəsilməz $E(x) > 0(E(0) = 0)$ funksiyası varsa və $\frac{dE}{dt} \le 0$ -dırsa, həyəcanlanmamış $x = 0$ həlli dayanıqlıdır.

38-ci misal. Xüsusi törəməli diferensial tənliklərin həlli, bir qayda olaraq, adi diferensial tənliklərin həllindən çətindir. Bir çox hallarda dəyişənin əvəz edilməsi vasitəsilə, ölçü mülahizələrinə görə arqumentlərin sayını azaltmaq olar. Misal olaraq

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (1)$$

şəklində yazılan istilikkeçirmə tipli birölçülü tənliyi həll edək. Hansı şərtlər daxilində x və t arqumentlərinin ölçüsüz bir ξ arqumenti ilə əvəz edilməsi məsələsinə baxaq, yəni $\xi = \xi\left(x, t, a^2\right)$. Göstərilən asılılığa ölçü əmsalı daxil edilmişdir. x və t uzunluq və zaman ölçülərinə malikdirlərsə,

$$\left[a^2\right] = \frac{L^2}{T}$$

olar.

π – teoremi əsasında asanlıqla

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{a^2 t}}$$

almaq olar.

$T(x, t)$-dən $T\left(\xi\right)$-yə keçək.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dT}{d\xi}\frac{1}{\sqrt{a^2 t}},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{dt^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{dT}{d\xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{d\xi^2}\cdot\frac{1}{a^2 t},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{d\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{dT}{d\xi}\left(-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t\, t}}\right) = -\frac{dT}{d\xi}\cdot\frac{\xi}{2}\cdot\frac{1}{t}.$$

Alınmış ifadələri $T(x, t)$ üçün tənlikdə yerinə yazsaq,

$$\frac{d^2 T}{d\xi^2} + \frac{\xi}{2}\frac{dT}{dt} = 0 \qquad (2)$$

alarıq.

Hiperbolik

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (3)$$

tənliyində

$$\left[a^2\right] = \frac{L^2}{T^2}$$

olur. Onda

$$\xi = \frac{x}{at}$$

alarıq.

Asanlıqla görmək olar ki, bu halda da tənlikdə iki arqumentdən bir arqumentə keçə bilərik. Doğrudan da

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{d^2 v}{d\xi}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \frac{dv}{d\xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{x^2}{a^2 t^2}\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \frac{2x}{dt^3}\frac{dv}{d\xi}$$

alarıq.

Alınmış ifadəni (3)-də yerinə qoysaq, adi diferensial tənlik alarıq

$$\left(\xi^2 - 1\right)\left(\frac{d^2 \upsilon}{d\xi^2} + 2\xi\frac{dv}{d\xi}\right) = 0.$$

Çox zaman oxşarlıq metodu ilə ikidəyişənlidən birdəyişənliyə keçmək çətin olur. Ona görə də

$$\xi = x^n t^m$$

qüvvət kombinasiyasının köməyi ilə x və t dəyişənlərini yeni ξ dəyişəni ilə əvəz edərək tənliyi başqa yolla alaq.

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{d\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{dT}{d\xi}\, n x^{n-1} t^m,$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{d\xi^2}\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \frac{dT}{d\xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{d\xi^2}\, n^2 x^{2(n+1)} t^{2m} +$$

$$+\frac{dT}{d\xi}\, n\left(n+1\right) x^{n+2} t^m,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{d\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{d}{d\xi}\, m x^n t^{m-1}$$

olur.

Alınmış ifadələri $T(x, t)$ üçün olan tənlikdə yerinə qoysaq

$$a^2 n^2 x^{n(n-1)}\, t^{2m} \frac{d^2T}{d\xi^2} + \left[a^2 n\,(n-1)\, x^{n-2} t^m - m x^n t^{m-1}\right] \frac{dT}{d\xi} = 0 \tag{4}$$

alarıq.

$$x^n = \frac{\xi}{t^{m-}} = \xi\, t^{-m} \qquad x = \xi^{\frac{1}{n}}\, t^{-\frac{m}{n}}$$

olduğundan (4) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$a^2 n^2 \xi \frac{d^2T}{d\xi^2}\left[a^2 n(n-1) - m\xi^{\frac{2}{m}}\, t^{-\left(\frac{2m}{n}+1\right)}\right]\frac{dT}{d\xi} = 0.$$

t tənlikdə iştirak edə bilmədiyindən onun dərəcəsi sıfra bərabər olmalıdır, yəni $\frac{2m}{n} + 1 = 0.$ Bu tənlikdə iki məchul var. Sadəlik üçün $n = 1$ verilir, onda $m = -\frac{1}{2}$ olar. Hansı başlanğıc və sərhəd şərtləri daxilində belə əvəzetmə ilə məsələnin tam həll edilməsinə baxaq. $T(\xi)$-yə görə 2-ci tərtib adi diferensial tənlik alındığından iki şərtin verilməsi zəruridir. Başlanğıc məsələ üçün isə üç şərt verilir: bir başlanğıc, iki sərhəd şərti. Beləliklə, elə şərtlər verilmişdir ki, yeni dəyişənlər də iki şərtə gətirilə bilsin. Bundan $T(\xi)$ üçün olan şərtlərdə ξ arqumenti x və t-nin müəyyən qiymətlərində müəyyən qiymətlər almalıdır.

1) $x \to 0 \qquad \xi \to 0$

2) $x \to \infty \qquad \xi \to \infty$

3) $x \to -\infty \qquad \xi \to -\infty$

4) $t \to 0 \qquad \xi \to \infty$

5) $t \to -\infty \qquad \xi \to 0$

6) $x = a\sqrt{t} \qquad \xi \to a$

Beləliklə, sonsuz $-\infty < x < +\infty$ oblastında, yarımsonsuz $0 < x < \infty$ oblastında və habelə hərəkət qanunu müəyyən edilmiş tərpənən sərhədlər halında ξ müəyyən qiymət alır. Asanlıqla görmək olar ki, $x \to \infty$, $t \to 0$ olduqda, daha doğrusu sonsuzliqda sərhəd şərtləri və başlanğıc şərtləri üst-üstə düşməlidirlər:

$$T(x, 0) = T(\infty, t) = T_0 = const$$

$\xi \to \infty$ olduqda

$$T_0 = c_1 \left[\int e^{-(1/2\xi)^2} \, d\xi\right]_{\xi \to \infty} + c^2$$

alarıq.

(9) ifadəsindən (8)-i çıxsaq,

$$T_0 - T_1 = c_1 \left\{\left[\int e^{-(1/2\xi)^2} \, d\xi\right]_{\xi - \infty} - \left[\int e^{-(1/\xi)^2} \, d\xi\right]_{\xi = 0}\right\} =$$

$$= c_1 \int_0^\infty e^{-(1/2\xi)^2} \, d\xi = c_1 \sqrt{\pi}$$

alınar, harada ki,

$$c_1 = \frac{T_0 - T_1}{\sqrt{\pi}}$$

-dır. Buradan (2) tənliyinin həllini

$$T(\xi) = T_1 + (T_0 - T_1)\,\Phi\xi$$

şəklində alırıq. Burada

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-(1/2\xi)^2} d\xi.$$

Göstərilən həll avtomodel (öz-özünə oxşar) adlanır.

Vahid zamanda $x = 0$ kəsiyində vahid sahədə keçən istilik miqdarını təyin edək:

$$q_2(0, t) = -k_4 \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = -k_4 \frac{\partial T(0)}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} \frac{k_4 (T_1 - T_0)}{\sqrt{a^2 \pi t}}.$$

– üçün alınan düstur daha mürəkkəb məsələlərin təqribi üsullarla həllinin yoxlanılması üçün etalon kimi istifadə edilə bilər. Bununla yanaşı avtomodel (öz-özünə oxşar) həll təqribi həllərin alınmasının əsası cəhətdən də izah oluna bilər.

39-cu misal.

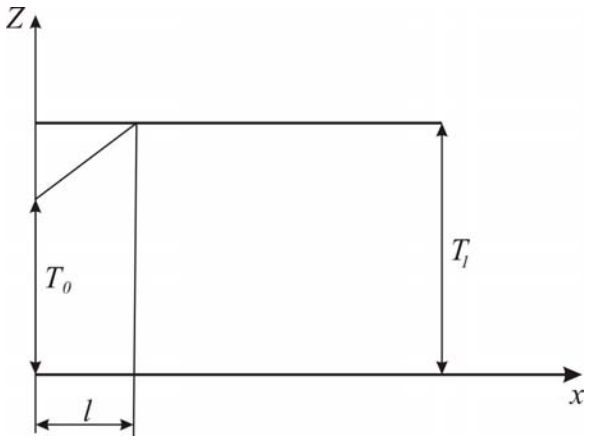
$$q_2 \sim k_4 \frac{T_1 - T_0}{\sqrt{a^2 t}}$$

düsturuna aşağıdakı nöqteyi-nəzərdən baxmaq olar. $l \sim \sqrt{a^2 t}$ işarə etsək, $t = 0$ olduqda $l = 0$ və beləliklə, bütün yarımsonsuz $0 \le x < \infty$ oblastında temperatur $T = T_1$ olur, yəni başlanğıc şərti ödənilir və

$$q_2 \sim \frac{k_4 (T_1 - T_0)}{l}$$

alınır. Alınan düstur, xüsusi halda, l zonasında temperaturun stasionar, sabit paylanması üçün də doğrudur.

Beləliklə, $0 \le x \le l$ zonasında temperatur $T_0 \le T \le T_1$ düzxətli qanunla dəyişir (21-ci şəkil). Bu zonanın kənarında temperatur sabitdir. Stasionar vəziyyətin ardıcıl dəyişmə üsulunun əsası qoyulur, yəni temperaturun stasionar paylanmasının nəzərdə tutulduğu həyəcanlanmış zonaya daxil edilir, lakin bu həyəcanlanmış zona zaman keçdikcə artır. Bu zonanın ölçüsünü ölçülərin təhlilindən aşağıdakı kimi qiymətləndirmək olar:



21-ci şəkil.

$$l = l\left(a^2, t\right),$$
$$[l] = L$$
$$\left[a^2\right] = \frac{L}{T},$$
$$[t] = T.$$

a^2 və t-nin kombinasiyasından asanlıqla l-in ölçüsünü almaq olar.

$$\left[\sqrt{a^2 t}\right] = l$$

Beləliklə,

$$\frac{l}{\sqrt{a^2 t}} = f\left(1, 1\right)$$

olur. Buradan

$$l \sim \sqrt{a^2 t}$$

alırıq.

Stasionar vəziyyətin ardıcıl əvəz olunması üsulunun aşağıdakı çatışmazlığı var: $x = l$ nöqtəsində soldan

yaxınlaşdıqda $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_1 - T_0}{l}$, bu nöqtəyə sağdan yaxınlaşdıqda $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ (bütün oblastda $x \geq l + 0$ olduqda $T = T_1$ olduğundan), beləliklə, bu nöqtədə 1-ci tərtib törəmə kəsiləndir.

Təqribi həlli 1-ci və sonrakı tərtib törəmələrin $x = l$ sərhəddində kəsilməzliyi baxımından alına bilər. Buna görə də həyəcanlanmış zonada temperaturun düzxətli deyil, parabolik paylanması verilir, yəni 2-ci və ya yüksək dərəcəli polinom şəklində verilir. Xüsusilə 1-ci tərtib törəmə kəsilməz olduqda həyəcanlanmış zonada temperatur

$$T(0, t) = T_0$$

$$T(l, t) = T_1$$

$$\frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = 0$$

şərtləri daxilində

$$T = a_1 \cdot x^2 + a_2 x + a_3$$

şəklində verilir.

Bu üç şərt a_1, a_2 və a_3 əmsallarının təyin edilməsi üçün istifadə oluna bilər. Bu şərtlərdən istifadə edərək, aşağıdakıları alırıq.

$$T(0.t) = T_0 = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 = a_3,$$

$$T(l, t) = T_1 = a_1 l^2 + a_2 l + T_0.$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 2a_1 x + a_2,$$

$$\frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = 2a_1 l + a_2 = 0.$$

Buradan

$$a_2 = -2a_1 l,$$

$$a_1 l^2 - 2a_1 l^2 + T_0 = T_1,$$

və ya

$$a_1 = -\frac{T_1 - T_0}{l_2},$$

$$a_2 = -\frac{2\,(T_1 - T_0)}{l},$$

beləliklə,

$$T = -\frac{T_1 - T_0}{l^2}\ x^2 + \frac{2\left(T_1 - T_0\right)}{l}\, x + T_0$$

alırıq. Temperaturun paylanması $l\ (0) = 0$ şərti daxilində başlanğıc və həmçinin sərhəd şərtlərini ödəyir. Ölçülər təhlilinin köməyi ilə l qiymətləndirilə bilər, yəni $l\ \ l = c\sqrt{a^2 t}$ düsturu ilə təyin olunacaqdır.

c sabitinin qiyməti temperaturun paylanmasının istilikkeçirmənin diferensial tənliyini ödəməsi şərtindən təyin oluna bilər, belə ki, həyəcanlanmış zonada istiliyin balansı inteqral şəklində ödənilsin:

$$\int_0^l a^2\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\, dx = \int_0^l \frac{\partial T}{\partial t}\, dx \qquad (1)$$

(1) bərabərliyinin sol tərəfini açaraq müəyyən etmək olur ki, o, ya həyəcanlanmış zonada toplanan istilik (bu vaxt cismin qızması baş verir) və ya ayrılan istiliyin miqdarıdır (bu vaxt soyuma baş verir). $T_1 > T_0$ (21-ci şəkil). Soyuma zamanı $\frac{\partial T}{\partial x} > 0$ və soyumanı nəzərə alsaq, sağ tərəf $\frac{\partial T}{\partial t} < 0,$ yəni sağ və sol tərəfin işarəsi eynidir.

Beləliklə, sol tərəf istiliyin toplanmasını və ya xaric olunmasını xarakterizə edir, sağ tərəf isə qızdırılmaya və ya soyudulmaya uyğun gəlir.*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{2\left(T_1 - T_0\right)}{l^2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2\left(T_1 - T_0\right)}{l^3} \cdot \frac{dl}{dt} x^2 - \frac{2\left(T_1 - T_0\right)}{l^2} \frac{dl}{dt} x,$$

*

Bu törəmələri istilik balansının inteqral tənliyində yerinə yazsaq aşağıdakını alarıq:

$$-\int_0^1 a^2 \frac{2\left(T_1 - T_0\right)}{l^2} dx = -2a^2 \frac{T_1 - T_0}{l^2} l = -2a^2 \frac{T_1 - T_0}{l},$$

$$\int_0^1 \frac{2\left(T_1 - T_0\right)}{l^3} \frac{dl}{dt} x^2 dx - \int_0^1 \frac{2\left(T_1 - T_0\right)}{l^2} \frac{dl}{dx} x dx = \frac{2\left(T_1 - T_0\right)}{l^3} \frac{dl}{dt} \frac{l^2}{3} - \frac{2\left(T_1 - T_0\right)}{l^2}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(T_1 - T_0\right)\frac{dl}{dt} - 2a^2 \frac{\left(T_1 - T_0\right)}{l} = -\frac{1}{3}\left(T_1 - T_0\right)\frac{dl}{dt} l dl = 6a^2 dt, \quad \frac{1}{2} l_2 = 6a^2 t,$$

yəni sabit $c = \sqrt{12}$ -dir. Dəqiq qiymət (avtomodel həll) $c = \Pi$-dir.

40-cı misal. Yuxarıda verilmiş avtomodel həll prosesin eyniləşdirilməsi üçün də istifadə oluna bilər. Özlü mayenin dairəvi silindrik boruda qeyri-stasionar hərəkəti misalına baxaq.

---

* $\dfrac{d\left(\dfrac{1}{l^2}\right)}{dt} = \dfrac{d\left(\dfrac{1}{l^2}\right)}{dt}\dfrac{dl}{dt} = -\dfrac{2}{l^3}\dfrac{dl}{dt}$

Başlanğıc anda bütün kəsiklərdə mayenin orta sürəti sıfra bərabərdir, yəni $\upsilon(0)=0.$ $t>0$ olduqda borunun uclarında sabit təzyiq düşməsi ΔP olur və $t\to 0$ olduqda orta sürət özünün stasionar υ_1 qiymətini almaqla monoton artır. υ_1 qiyməti ölçülərin təhlili nöqteyi-nəzərindən qiymətləndirilə bilər:

$$\upsilon_1=\upsilon_1(\Delta P,\mu,d), \qquad (1)$$

burada d – borunun diametridir.

Sağ tərəfə daxil olan kəmiyyətlərin ölçüləri belədir:

$$\left[\frac{\Delta P}{L}\right]=\frac{P}{L^3},\quad [\mu]=\frac{PT}{L^2},\quad [d]=L\,.$$

$\dfrac{\Delta P}{L}$ və d-ni birləşdirərək aşağıdakı ölçünü almaq olar.

$$\left[\frac{\Delta P}{L}d^3\right]=P,$$

μ-dən istifadə edərək T-nin ölçüsünü ala bilərik:

$$\left[\frac{\mu}{\dfrac{\Delta l}{l}d^3}\right]=\left[\frac{\mu l}{\Delta P d^3}\right].$$

Beləliklə,

$$[d]=L,\quad \left[\frac{\Delta P d^3}{l}\right]=P\quad \left[\frac{\mu l}{\Delta P d}\right]=T$$

$[\upsilon_1]=\dfrac{L}{T}$ olduğunu nəzərə alaraq, (1)-in sağ və sol tərəflərində ölçüsüz kəmiyyətlərə keçək:

$$\frac{\upsilon_1}{d}\frac{\mu l}{\Delta P d}=f(1,1,1)=const.$$

Buradan

$$\upsilon_1 = c\frac{\Delta P d^2}{\mu l}$$

alarıq.

Uyğun hidravlik hesablamalar göstərir ki, sabit c =1/32. Stasionar hərəkət halında orta sürətin zəruri təzyiq düşməsi

$$\Delta P = 32\frac{\mu l \upsilon_1}{d^2}.$$

kimi təyin olunardı.

Qeyri-stasionar hərəkət inkişaf etdikcə ətalət qüvvələri azalır və $t \to \infty$ olduqda limit quyməti sıfra bərabər olur. Burada da təzyiqin özlülüyün təsiri nəticəsində düşməsinin stasionar hərəkətə aid düsturla təyin olunması qəbul olunur (kvazistasionarlıq hipotezi)

$$\Delta P_2 = \frac{32\mu l \upsilon_1}{d^2}.$$

Beləliklə,

$$\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 = l\rho\frac{d\upsilon_1}{dt} + \frac{32\mu l \upsilon_1}{d^2}.$$

alırıq.

Təzyiq təyin etmək üçün birinci tərtib qeyri-bircins xətti diferensial tənlik alınmışdır. Bu tənliyi

$$\frac{d\upsilon_1}{dt} + a\upsilon_1 = b \qquad (2)$$

şəklində yazaq, burada

$$a = \frac{32\mu}{d^2\rho}, \quad b = \frac{\Delta P}{l\rho}\text{-dir.}$$

Bu tənliyi bircins tənliyə gətirmək üçün yeni U funksiyasını daxil edək;

$$\upsilon_1 = U + \frac{b}{a}$$

Onda

$$\frac{dU}{dt} + aU = 0$$

$$\frac{dU}{U} = -adt$$

$$InU = -at + In\,c$$

$$U = ce^{-at}$$

Beləliklə,

$$\upsilon_1 = cl^{-at} + \frac{\Delta Pd^2}{32\mu l}$$

alırıq.

$t = 0$ olduqda $\upsilon_1 = 0$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$0 = c_1 + \frac{\Delta Pd^2}{32\mu l}$$

alarıq.

$$c = -\frac{\Delta Pd^2}{32\mu l} \ .$$

Beləliklə,

$$\upsilon_1 = \frac{\Delta Pd^2}{32\mu l}\left(1 - l^{-\frac{32\mu}{d_2\rho}}\right). \qquad (3)$$

alarıq.

(2) tənliyini bu cür də başa düşmək olar; sol tərəfdəki ikinci hədd və sağ tərəfdəki hədd prosesin stasionar xarakteristikasıdır. Prosesin qeyri-stasionarlığı, $t \to \infty$ olduqda sıfra yaxınlaşan uyğun törəmələrin əlavə edilməsi yolu ilə nəzərə alınır. Baxılan halda proses təbii olaraq sönən xarakter daşıyır.Buna görə də birinci tərtib törəmə ilə kifayətlənmək olardı, ancaq bu heç də yüksək tərtib törəmələrdən, xüsusi halda ikinci tərtib törəmədən istifadə olunmasını müstəsna etmir və bu yalnız nəzərdə tutulan maye üçün doğru ola bilər. Onda $\upsilon_1(0) = 0$ şərti ilə yanaşı, bu

başlanğıc şərtinə yaxınlaşma prosesini xarakterizə edən şərtin verilməsi, başqa sözlə, $\frac{d\upsilon_1}{dt}$ -nin sıfır nöqtəsində verilməsi zəruridir. Bu halda ölçüyə əməl etmək üçün ikinci tərtib törəmənin qarşısında relaksiya vaxtını xarakterizə edən əmsal qoyulur.

$\frac{d^2\rho}{\mu}$ kəmiyyətini t_1 ilə işarə edək. Asanlıqla görmək olar ki, bu kəmiyyət zaman vahidi ilə ölçülür, onda

$$\upsilon_1 = \frac{\Delta P d^2}{32\mu l}\left(1 - l^{-32\frac{t}{t_1}}\right).$$

Bu ifadədən görünür ki, $t = \frac{1}{7}t_1$ olduqda $l^{\frac{-32}{t_1}} = 0{,}0103$, $t = \frac{1}{6}t_1$ olduqda isə $l^{\frac{-32}{t_1}t} = 0{,}004b$ olur, yəni təcrübi olaraq stasionarlıq $t \to \infty$ olduqda deyil, $t = 1/6t_1$ olduqda da ikinci işarə dəqiqliyi ilə alınır (33-cü misala bax).

t_1 zamanı, mayenin «ətalətliliyini» xarakterizə edir. t_1 böyük olduqca, böyük zaman ərzində təcrübi olaraq sabitlik əldə edilir. Təbiidir ki, t_1 zamanı ətalət qüvvəsindən ρ, özlülük qüvvəsindən (μ) və diametrin xarakterik həndəsi ölçüsündən (d) asılıdır, yəni $t_1 = t_1(\rho, \mu, d)$.

Ölçülərin təhlili əsasında t_1-in tərtibini qiymətləndirmək olar:

$$t_1 \sim d^2\rho/\mu$$

Əlavə verilmiş şərtlər daxilində (2) tipli birinci tərtib adi xətti diferensial tənliyin əmsallarının təyin olunması sadə misalına baxaq:

$$y' + ay = b$$

tənliyi üçün $y(0) = 0$ şərti daxilində Koşi məsələsini həll edək. a və b məlum olduqda məsələnin həlli

$$y = \frac{b}{a}\left(1 - l^{at}\right)$$

şəklində göstərilə bilər.

Fərz edək ki, a və b əmsalları sabitdir, ancaq məlum deyildirlər, ona görə də bu iki əmsalı təyin etmək üçün əlavə 2 şərt vermək lazımdır, yəni çıxış funksiyasının arqumentin iki t_1 və t_2 qiymətlərindəki $y(t_1) = y_1$, $y(t_2) = y_2$ qiymətləri məlum olmalıdır.

a və b naməlum parametrlərini təyin etməklə diferensial tənliyin təcrübədən alınan nəticələrə uyğunluğunu yoxlayarkən $y(t)$ çıxış kəmiyyətini bütün tədqiqat intervalında vermək lazımdır.

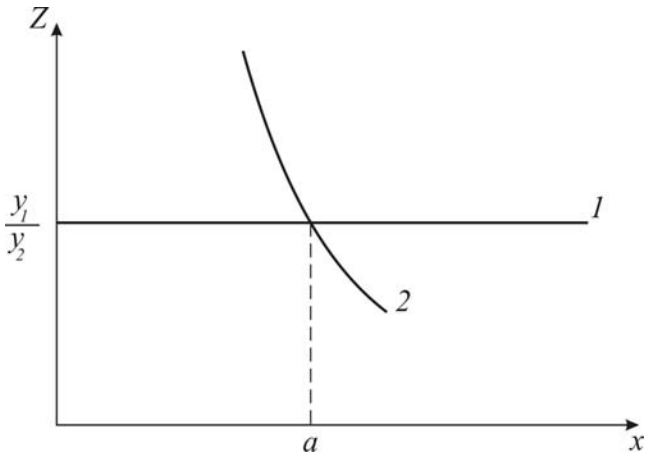
y_1 və y_2 məlum olduqda, parametrləri təyin etmək üçün aşağıdakı əməllər aparılır:

$$y_1 = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at_1}\right),$$

$$y_2 = \frac{b}{a}\left(1 - e^{-at_2}\right),$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1 - l^{-at_1}}{1 - l^{-at_2}}.$$

Ədədi üsullardan birindən istifadə etməklə sonuncu transendent tənlikdən a parametrini tapmaq olar, xüsusi halda a parametrindən asılı olaraq alınan ifadənin sağ və sol tərəfləri qurulur.



22-ci şəkil.

$$\frac{1-l^{-at_1}}{1-l^{-at_2}} = z\ .$$

işarə edək.

$\frac{y_1}{y_2}$ nisbəti a-dan asılı olmadığından (22-ci şəkil) o absis oxuna paralel 1 düz xətti şəklində göstərilir. a-ya müxtəlif qiymətlər verməklə xüsusi halda 2 əyrisi şəklində olan z asılılığı qurulur, 1 və 2 xətlərinin kəsişmə nöqtəsi a-nın axtarılan qiymətidir.

a-nın tapılan qiymətində b əmsalını aşağıdakı qayda ilə təyin etmək olar:

$$b = \frac{y_1 a}{1-l^{-at_1}}$$

a və b parametrlərinə $a = 2$, $b = 4$ qiymətlərini verək və a və b-nin məlum qiymətlərində $t_1 = 0{,}53$, $t_2 = 0{,}56$ anlarında uyğun y_1 və y_2-ni təyin edək, onda $y_1 = 1{,}307$, $y_2 = 1{,}347$ alarıq.

Fərz edək ki, y_1 və y_2 təcrübədən 1% xətalı alınanlar əsasında təyin edilibdir, onda $y_1 = 1{,}320$ və $y_2 = 1{,}340$ olur.

a və b-ni bərpa etmək üçün y_1 və y_2-nin «sıxılmış» qiymətlərindən istifadə edək.

Transtendent tənliyi həll edərək $a = 4$ və $b = 6$ alırıq. Beləliklə, əlavə şərtlərin kafi qədər kişik dəyişməsi a və b-nin təyinində a-da 2 dəfə, b-də isə 1,5 dəfə böyük səhvlərə gətirir. Birinci y' törəməsini $y' = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t_i}$-lə əvəz etsək və bütün çıxış qiymətlərindən istifadə etsək,

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t_i} + a y_i = b \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

cəbri tənliklər sistemini alarıq. a və b-ni həmçinin ən kiçik kvadratlar üsulu ilə təyin etmək olar. Pis şərtlənilən cəbri sistem halında da çıxış kəmiyyətlərinin kafi qədər kiçik səhvi a və b-nin təyin olunmasından böyük səhvə gətirər, yəni məsələ korrekt deyil (20-ci misala bax). Bu tip məsələlər üçün $y(t)$-nin təyinində səhvlərin təsirini «dəf» edən maneəyə dayanıqlı üsul tətbiq etmək, dəqiq desək, xətanın a və b parametrlərinə təsirini minimuma endirmək zəruridir.

Bunun üçün aşağıdakı riyazi eksperiment aparılır. $a = 2$ və $b = 4$ məlum qiymətlərində; t, 0 ilə 2 arasındakı dəyişmə intervalında y-in qiyməti hesablanır, yəni düz məsələ həll olunur.

Sonra bu verilənlər ±5%-dən böyük olmayan xəta ilə «sıxılırlar». Nəticələr 23-cü cədvəldə verilib, «sıxılmış» verilənlər $\widehat{y}$-lə işarə olunmuşdur. Onda «sıxılmış» funksiya üçün diferensial tənliyi inteqrallasaq, $\widehat{y}(0) = 0$ şərti daxilində

$$\widehat{y} = a \int_0^t \breve{y} dt = bt$$

alarıq. Buradan

$$\frac{\widehat{y}}{t} = b = a\frac{\int_0^t \breve{y}dt}{t}$$

alırıq,

23-ci cədvəl

Sıra №-si	Arqumentin qiymətləri t	Çıxış kəmiyyətlərinin dəqiq qiymətləri y	Çıxış kəmiyyətlərinin səsli qiymətləri $\overline{y}$
1	2	3	4
1	0,09999	0,36253	0,33533
2	0,19999	0,65936	0,70500
3	0,30000	0,90237	0,85295
4	0,39999	1,10134	1,13859
5	0,50000	1,26424	1,25112
6	0,60000	1,39761	1,38859
7	0,69999	1,50680	1,54550
8	0,79999	1,59620	1,54651
9	0,89999	1,66940	1,71410
10	1,00000	1,72932	1,70401
11	1,09999	1,77839	1,77618
12	1,20000	1,81856	1,84759
13	1,29999	0,85145	1,80494
14	1,39999	1,87837	1,92739
15	1,50000	1,90042	1,88648
16	1,59999	1,91847	1,92440
17	1,69999	1,93325	1,95058
18	1,79999	1,92535	1,95529
19	1,89999	1,95525	1,00514
20	2,00000	1,96336	1,91970

$$\frac{\int_0^t \breve{y}dt}{t} = Y_1 \quad \frac{\widehat{y}}{t} = Y_2$$

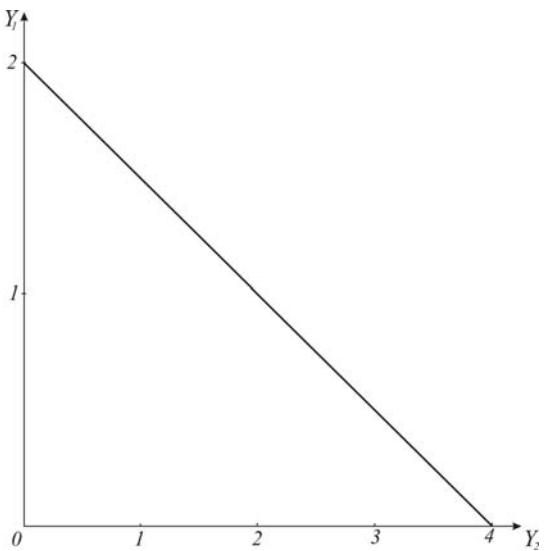
işarə edək. Onda

$$У_2 = b = aУ_1$$

alarıq.

Beləliklə, $У_1$ və $У_2$ koordinatlarında işlədilən təcrübi verilənlər, model təcrübəyə uyğun olduqda düz xətt üzərində yerləşməlidir.

Cədvəldə verilənlərin işlənməsi 23-cü şəkildə göstərilmişdir. Cədvəldən göründüyü kimi, təcrübi nöqtələr düz xətt üzərində kafi qədər yaxşı yerləşiblər.



23-cü şəkil.

$У_1 = 0$ olduqda $У_2 = 4 = b$; $У_2 = 0$ olduqda isə $У_1 = 2$ olur. Onda

$$-2a + b = 0,$$

$$-2a + 4 = 0,$$

$$a = 2$$

alarıq.

Beləliklə, çıxış kəmiyyətləri realizə edildikcə buraxılan səhvlər modelin parametrlərinin vergüldən sonrakı birinci rəqəmə qədər dəqiqliklə tapılması nəzərə alınmaqla onların təyin edilməsinə təsir göstərməmişdir.

38-ci misalda qeyd olunduğu kimi, avtomodel həllər etalon kimi istifadə edilə bilərlər. Bundan başqa onlar üstünlüyə malikdir və təqribi həllərə baxdıqda çox faydalı olurlar. Başlanğıc şərtsiz məsələlərdə də kompakt həllər alına bilər. Əgər sonsuz sərbəstlik dərəcəsi olan sistemin rəqsi və ya başlanğıc momentdən kafi qədər uzaq olan momentə istilikkeçirmə prosesi araşdırılarsa, onda müşahidə anında başlanğıc şərtlər əyani olaraq temperaturun və yerdəyişmənin paylanmasına təsir göstərmirlər. Baltaya, iskənəyə keçid kafi qədər böyük olduqda, yəni proses müqayisə ediləcək dərəcədə böyük zaman ərzində keçdikcə qazma dəstəsinin uzununa rəqslərinə aid məsələyə başlanğıc şərtlərsiz baxmaq olar. Sürgü qolu ilə silindr arasındakı məsamədə dövri qanunla hərəkət edən maye itkisinin təyininə uyğun məsələni də başlanğıc şərtsiz həll etmək olar. Bunun nəticəsində itkinin təyin olunması üçün stendlər də sürgünün irəli hərəkət qanununun prinsipi əsasında qurula bilərlər.

41-ci misal. İdeal, yəni sürtünməsiz mühitdə

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \tag{1}$$

şərtləri daxilində milin uzununa rəqsinin

$$V(0,t) = A\sin\omega t \quad V(l,t) = 0^{*} \tag{2}$$

tənliyinə baxaq.

Xəyali hissənin əmsalını həll edərək götürsək və Eyler formuluna görə

$$l^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$

olduğunu nəzərə alsaq, (1) şərtlərindən birincisini

---

* Burada yuxarıdakı kimi $a^2 = 1$ qəbul olunur.

$$V\left(at\right)=Ae^{i\omega t}$$

kimi yazmaq olar.

Tənliyin həllini

$$V=B\,e^{i\omega t}\cdot X\left(x\right)$$

şəklində axtaraq. Onda

$$\frac{\partial V}{\partial t}=B\,i\omega\,e^{i\omega t}X\left(x\right),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}B\,i^2\omega^2 e^{i\omega t}X\left(x\right)=B\omega^2 e^{i\omega t}X\left(x\right),$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=B\,e^{i\omega t}X\left(x\right),\quad \frac{\partial V}{\partial x^2}=B\,e^{i\omega t}X''\left(x\right).$$

İlk tənlikdə yerinə yazsaq,

$$X''\left(x\right)+\omega^2 X\left(x\right)=0$$

alarıq.

Bu tənliyin həlli

$$X\left(x\right)=C_1\,\sin\,\omega x+C_2\cos\,\omega x$$

şəklində olar.

(23-cü misala bax), onda

$$V=B\,e^{i\omega t}\left(C_1\,\sin\omega x+C_2\,\cos\omega x\right)=E\,e^{i\omega t}\sin\omega x+D\,e^{i\omega t}\cos\omega x$$

alınır, burada $E=BC$, $D=BC_2$-dır. E və D əmsalları sərhəd şərtlərinin ödənilməsindən təyin edilir.

$$Ae^{i\omega t}=E\,e^{i\omega t}\sin\left(0\right)+D\,e^{i\omega t}\cos\left(0\right)=D\,e^{i\omega t}\ ,$$

buradan

$$0=E\,e^{i\omega t}\sin\omega l+D\,e^{i\omega t}\cos\omega l$$

alınır.

Buradan isə

$$E=-A\frac{\cos\,\omega l}{\sin\,\omega l}=-A\,ctg\,\omega l$$

olar.

Onda

$$V = A\, e^{i\omega t}\, \frac{\sin \omega(l-x)}{\sin \omega l}$$

alarıq.

Nəhayət, xəyali hissənin əmsalını götürsək,

$$U = A \sin \omega t\, \frac{\sin \omega(l-x)}{\sin \omega l}$$

alarıq.

42-ci misal. Başlanğıc şərtlərin temperaturun paylanmasına təsirini nəzərə almadan istiliyin yayılmasına baxaq. Bu, xüsusi halda, bir ucda temperatur harmonik qanunla, məsələn

$$T(0;\, A) = A \cos \omega t$$

kimi dəyişdikdə mümkündür.

İkinci şərt həllin məhdudluğunu təmin etmək üçündür. Belə məsələ torpaqda istilik rəqslərinin təyinində və eləcə də neft-mədən mexanikasının bir sıra məsələlərində maraq doğurur. Qeyd olunmuşdur ki, quyu nasosunun silindri ilə sürücü qolunun arasındakı məsamədə, özlü maye axınının təyinindəki məsamədə sürətin zamandan asılı olaraq paylanmasını təyin etmək zəruridir. Bu proses istilikkeçirmə tipli tənlikdə ifadə olunur. Sürgü qolu hərəkətinin sürəti hissə-hissə sabit funksiyadır və Furye sırası şəklində ifadə oluna bilər. Ona görə də, bir parçada həlli taparaq tənliyin xəttiliyini nəzərə alsaq,xüsusi həlləri toplayıb məsələnin həllini taparıq. Deməli, istilikkeçirmə tənliyinin (34-cü misala bax: $\alpha = 1$ olduqda (8) tipli tənlik) $T(0;t) = A \cos \omega t$ şərtini ödəyən məhdud həllini tapmaq lazımdır. Sərhəd şərtini $A e^{i\omega t}$ şəklində yazmaq olar. Əgər istilikkeçirmə tənliyinin bu şərti ödəyən həlli tapılıbdırsa, onun həqiqi hissəsi $A \cos \omega t$ şərtini, xəyali hissəsi $A \sin \omega t$ şərtini ödəyəcəkdir. Deyilənlər, kompleks həllin həqiqi və xəyali hissəsi ayrılıqda tənliyi ödəyən, xətti istilikkeçirmə tənlikləri üçün doğrudur. 41-ci misala analoji olaraq həlli

$$T(x;t) = Ae^{i\omega t} X(x) \qquad (1)$$

şəklində axtaraq.

Onda

$$\frac{\partial T}{\partial x} = Ae^{i\omega t} X'(x),$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = Ae^{i\omega t} X''(x),$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = iA\omega e^{i\omega t} X(x).$$

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ və $\frac{\partial T}{\partial t}$ -ni istilikkeçirmə tənliyində yerinə yazsaq,

$$X''(x) - i\omega X(x) = 0 \qquad (2)$$

alarıq.

$x = 0$-dakı sərhəd şərtini nəzərə alsaq,

$$T(0;\, t) = Ae^{i\omega t} X(0) = Ae^{i\omega t} \qquad (3)$$

alarıq.

Buradan

$$x(0) = 1 \qquad (3)$$

olar.

(2) tənliyi üçün xarakteristik tənlik

$$k^2 - i\omega = 0$$

şəklində olar.

Bu tənliyin kökləri $k = \mp\sqrt{i\omega}$ -dir. Onda (2) tənliyinin həlli

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{i\omega}\, x} + C_2 e^{-\sqrt{i\omega}\, x} \qquad (4)$$

olar.

Məhdud həll axtarıldığından və x sonsuzluğa yaxınlaşanda 1-ci həddin sonsuzluğa yaxınlaşdığını nəzərə alsaq, $C_1 = 0$ olar və

$$X(x) = C_2 e^{-\sqrt{i\omega}\, x}$$

alarıq. (3) şərtinin ödənilməsindən

$$C_2 = 1$$

alarıq.

Beləliklə,

$$X(x) = e^{-\sqrt{i\omega}\,x} \tag{5}$$

olar.

$X(x)$-i (1)-də yerinə yazsaq,

$$T(x,t) = A\,e^{i\omega t - \sqrt{i\omega}\,x}$$

alarıq.

$\sqrt{i}$ -ni kompleks ədəd şəklində yazsaq, yəni $\sqrt{i} = a + b$ və ya

$$i = a^2 + 2abi + b^2 i = a^2 + 2abi - b^2 \tag{7}$$

alarıq.

(7)-dən həqiqi və xəyali hissə əmsallarını bərabərləşdirsək,

$$a^2 - b^2 = 0; \qquad 2ab = 1$$

alarıq.

Buradan

$$a = b; \quad 2a^2 = 1; \quad a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

alırıq.

Deməli,

$$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)\text{-dir.} \tag{8}$$

(8)-m (6)-da yerinə yazsaq,

$$T(x,t) = A\,e^{i\omega t - \frac{\sqrt{2\omega}}{2}x - i\frac{\sqrt{2\omega}}{2}x} = A\,e^{-\frac{\sqrt{2\omega}}{2}x + 1\left(\omega t - \frac{\sqrt{2\omega}}{2}x\right)} \tag{9}$$

alarıq.

(9)-un həqiqi hissəsi baxılan məsələnin həllidir. Yəni

$$T(x,t) = Ae^{-\frac{\sqrt{2\omega}}{2}x}\cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{2\omega}}{2}\,x\right) \tag{10}$$

doğrudur.

$a^2 \neq 1$-dirsə, (10)-u

$$T(x,t) = Ae^{-\frac{\sqrt{2\omega}}{a^2}\frac{x}{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{2\omega}}{a^2}\frac{x}{2}\right)$$

şəklində yazmaq olar.

Bu düsturla yüksək temperaturun azalma vaxtını, eləcə də istilik rəqslərinin amplitudunun azalmasını təyin etmək olar.

Son söz

Hörmətli oxucu, sizinlə birlikdə riyaziyyatın müxtəlif bölmələrini – tərifdən başlamış təqribi üsulların əsaslandırılmasına qədər – nəzərdən keçirdik. Hər bir məsələnin həllində biz Kiplinqə əsaslanmağa çalışmışıq:

Mənim altı zirək, cəsur nökərim var,
Ətrafda gördüyüm hər şeyi onlardan öyrənirəm.
Çətinliklə onlar mənim işarəmlə peyda olurlar.

Adları belədir: Necə və Niyə, Kim, Nə, Nə vaxt və Harda. Götenin, bizim dövrümüzdə də öz müdrikliyini və mənasını itirməyən kəlamlarını yada salaq: «Mən lazımi yerdə tətbiq olunan riyaziyyata uca və anlaşılan bir elm kimi ehtiram edirəm, o yerdə ki, ondan sui-istifadə edirlər... guya ki, riyazi isbat olunması mümkün olmayan şey mövcud deyil, buna mən dözə bilmirəm. Nə cəfəngiyat! Bu ona bənzər ki, kim isə öz istəklisinin sevgisinə ona görə inanmayaçaq ki, qız bunu riyazi isbat edə bilməmişdir... ».

Biz ümidvarıq ki, bu kitabı oxuyan oxucuda ona «aydın» görünən və bu kitabda verilməyən məsələlərə qayıtmaq arzusu yaranacaqdır.

Əgər oxucular toxunulan məsələlərə tənqidi yanaşıb, kitabda olmayanları tənqid etməsələr müəlliflər onlardan razı qalarlar.

İlk baxışda, misallara «üfüqi» istiqamətdə baxılsa, elə görünə bilər ki, onlar bir-birilə əlaqəli deyillər. Ümidvarıq, həmin misallara «şaquli» istiqamətdə baxılması onların ayrılıqda bir-birindən asılı olmaması haqqında daha optimist fikir yaradacaqdır.